

1. Tekintsük az  $S_5$  hatását a konjugálással az 5-Sylowjain! Bizonyítsuk be, hogy ez az  $S_5$ -nek olyan beágyazását adja  $S_6$ -ba, ahol  $S_5$  képének harmadrendű elemei fixpontmentesek.
2. Legyen  $H, K \leq S_n$  úgy, hogy  $|S_n : H| = |S_n : K| = n$ . Bizonyítsuk be, hogy van olyan  $\sigma \in \text{Aut } S_n$ , amelyre  $H\sigma = K$ .
3. Lássuk be, hogy  $|\text{Aut } S_6| > S_6$ .

A 4., 5., 6. feladat a Sylow-tételek egy permutációcsoportos bizonyításához ad útmutatást.

4. Legyen  $|G| = p^a m$ , ahol a  $p$  prím nem osztója  $m$ -nek, és hattassuk  $G$ -t a jobbszorzással a  $\binom{p^a m}{p^a}$  darab  $p^a$  elemű részhalmazon. Mutassuk meg, hogy ekkor minden orbit
    - a) vagy egyrétegűen fedi le  $G$ -t,  $m$  elemű, és pontosan egy részcsoport van az orbit elemei között,
    - b) vagy átfedéssel fedi le  $G$ -t,  $p$ -vel osztható elemszámú, és nincs benne részcsoport.
  5. Bizonyítsuk be, hogy  $\binom{p^a m}{p^a} \equiv m \pmod{p}$  (alkalmazzuk az előző feladatot a  $p^a m$  rendű ciklikus csoportra), és lássuk be ebből, hogy  $|\text{Syl}_p(G)| \equiv 1 \pmod{p}$ .
  6. Tekintsük  $G$  hatását  $\text{Syl}_p(G)$ -n a konjugálással. Lássuk be, hogy
    - a) egy  $Q$   $p$ -részcsoport akkor és csak akkor hagy helyben egy  $P$   $p$ -Sylowot, ha  $Q \leq P$ ;
    - b) minden  $p$ -részcsoport beágyazható egy  $p$ -Sylowba;
    - c)  $G$  tranzitívan hat  $\text{Syl}_p(G)$ -n.
  7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy csoport kommutátor részcsoportja véges, akkor minden konjugáltosztálya is véges.
  8. Lássuk be, hogy  $H, K \leq G$ -re  $H \leq N_G([H, K])$ .
  9. Tegyük fel, hogy a  $G$  nem kommutatív csoport minden valódi normálosztója kommutatív. Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $G/G'$  véges.
- Hf1.** Bizonyítsuk be, hogy  $\text{Aut } S_n \cong S_n$  igaz  $n = 3, 4, 5$ -re is.
- Hf2.** Bizonyítsuk be, hogy ha  $H$  maximális részcsoport  $G$ -ben, akkor  $H \geq Z(G)$  vagy  $H \geq G'$ .
- Hf3.** Határozzuk meg egy legalább három elemű  $K$  test fölötti  $2 \times 2$ -es invertálható felső háromszögmátrixok multiplikatív csoportjának kommutátor részcsoportját.