1. Bizonyítsuk be, hogy $n \leq 6$-ra S_n-nek minden nilpotens részcsoportja kommutatív vagy p-csoport. Keressük meg (konjugáltság erejéig) S_7-ben az összes nem kommutatív nilpotens részcsoportot!

2. Bizonyítsuk be, hogy ha M maximális részcsoportja egy G véges feloldható csoportnak, akkor $|G : M|$ prímhatvány.

3. Bizonyítsuk be, hogy egy nilpotens csoportban minden nem triviális normálosztó metszi a centrumot!

4. Legyen $x, y \in G$. Bizonyítsuk be, hogy
a) $[x, y] = [y, x]^{-1}$;
b) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$ és $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$;
c) $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$, ahol $[x, y, z] := [[x, y], z]$.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B, C \triangleleft G$, akkor
a) $[A, B] \triangleleft G$;
b) $[A, B] = [B, A]$;
c) $[AB, C] = [A, C][B, C]$;
d) $[A, B, C] \leq [B, C, A][C, A, B]$.

6. Legyen G nilpotens csoport, amelynek fölső centrállánca $1 = Z_0 < Z_1 < \cdots < Z_k = G$, és ferde kommutátorlánca $G = K_1 > K_2 > \cdots > K_{k+1} = 1$. Bizonyítsuk be, hogy
a) $[Z_j, K_i] \leq Z_{j-i}$, ha $j \geq i$;
b) $[K_i, K_{k-i}] = 1$, minden i-re.

7. Legyen M c nilpotenciaosztályú, N pedig d nilpotenciaosztályú normálosztó G-ben. Bizonyítsuk be, hogy MN is nilpotens normálosztó, amelynek nilpotenciaosztálya legföljebb $c + d$.

8. Bizonyítsuk be, hogy egy G véges csoportban létezik legnagyobb nilpotens normálosztó (azaz olyan, amelyik minden más nilpotens normálosztót tartalmaz). Ez a Fitting-részcsoport, $F(G)$.

9. Bizonyítsuk be, hogy egy véges feloldható csoportnak minden nem triviális normálosztója metszi a Fitting-részcsoportot!

Hf1. Legyen $N, K \triangleleft G$, ahol K nilpotens, és N minimális normálosztó a G-ben. Bizonyítsuk be, hogy $N \leq C_G(K)$.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy ha $G' \leq Z(G)$, akkor bármely $x, y \in G$-re és n pozitív egész számra $(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{2}}$.