**1.** Adjunk meg
a) 3 rangú szabad részcsoportot $F(x, y)$-ban;
b) 4 rangú szabad részcsoportot $F(x, y, z)$-ben!
Van-e ilyen véges indexű részcsoport?

**2.** Bizonyítsuk be, hogy $F(x, y)$-ban $\langle x, y^{-1}xy, y^{-2}xy^2, y^{-3}xy^3, \ldots \rangle$ végtelen rangú szabad csoport.

**3.** a) Bizonyítsuk be, hogy $\langle x, y \,|\, x^2 = y^2 = 1,\ xyxy = yxyx \rangle \cong D_4$.
b) Hány elemű a $\langle x, y, z \,|\, x^2 = y^2 = z^3 = 1,\ xy = yx,\ z^{-1}xz = y \rangle$ csoport?
c) Lássuk be, hogy $\langle x, y \,|\, x^2 = y^2 = 1 \rangle$ minden véges nem kommutatív homomorf képe izomorf valamelyik diéder csoporttal.

**4.** Adjuk meg $S_4$-et definiáló relációkkal úgy, hogy a generátorelemek transzpozícióknak feleljenek meg! Adjuk meg $A_5$-öt hasonlóképpen 3-ciklusokkal generálva!

**5.** Bizonyítsuk be, hogy
a) $\langle x, y \,|\, y^{-1}xy = x^2,\ x^{-1}yx = y^2 \rangle = 1$;
b)* $\langle x, y, z \,|\, y^{-1}xy = x^2,\ z^{-1}yz = y^2,\ x^{-1}zx = z^2 \rangle = 1$.

**6.** Adjuk meg definiáló relációkkal a következő csoportokat:
a) $C_2 \times C_2 \times C_4$ b) $C_3 \times C_8$ c) $Q$

**7.** Határozzuk meg $D_4$ és $S_4$ karaktertábláját!

**8.** Ha $\varphi : G \to S_n$ permutációreprezentáció, és $X : G \to GL_n(\mathbb{C})$ az a reprezentáció, amelynél minden $g$ elem úgy hat a vektortér egy rögzített bázisán, ahogy $\varphi(g)$ hat az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazon, akkor hogyan kapjuk meg az $X$-hez tartozó karakter értékeit? Keressünk ennek alapján $S_5$-nek ötöd-, illetve hatodfokú komplex karaktereit, és bontsuk föl ezeket irreducibilis karakterek összegére!

**Hf1.** Bizonyítsuk be, hogy minden 1-nél nagyobb rangú szabad csoport centruma triviális.

**Hf2.** Hány elemű az $\{ x, y \,|\, x^5 = y^3 = 1,\ x^{-1}yx = y^2 \}$ csoport?