

1. Legyen $N \triangleleft G$. Mutassuk meg, hogy G/N minden irreducibilis reprezentációja a természetes $G \rightarrow G/N$ homomorfizmussal megkomponálva irreducibilis reprezentációját adja G -nek.
2. Bizonyítsuk be, hogy Abel-csoportnak minden irreducibilis karaktere lineáris (azaz elsőfokú), és általában egy G csoport lineáris karaktereinek száma $|G : G'|$.
3. Bizonyítsuk be, hogy $\bigcap_{\chi \in \text{Irr } G} \text{Ker } \chi = 1$.
4. Bizonyítsuk be, hogy G normálosztói éppen az irreducibilis karakterek magjának metszetei.
5. Legyen $X : G \rightarrow GL(V)$ irreducibilis reprezentáció, ahol V egy \mathbb{C} fölötti vektortér. Bizonyítsuk be, hogy $C_{GL(V)}(X(G)) = \{ \lambda \cdot id \mid \lambda \in \mathbb{C} \}$.
6. Legyen $\chi \in \text{Irr } G$. Lássuk be, hogy ekkor $Z(\chi) / \text{Ker } \chi = Z(G / \text{Ker } \chi)$.
7. Mutassuk meg, hogy G centruma az irreducibilis karakterek centrumainak metszete.
8. Lássuk be, hogy Q -nak és D_4 -nek megegyezik a karaktertáblája.
9. Határozzuk meg A_4 és S_5 karaktertábláját.
10. Alább egy véges csoport kissé hiányos karaktertáblája látható. Egészítsük ki a táblázatot (vegyük figyelembe, hogy a sorok és oszlopok esetleg nem a megszokott sorrendben vannak, tehát az 1 elemhez tartozó oszlop nem feltétlenül az első, és a triviális karakter nem feltétlenül az első sorba került)! Mekkora a csoport rendje, konjugáltosztályainak mérete, milyen rendű normálosztói vannak? Mekkora a csoport centruma? Hány olyan csoport van, aminek ez a karaktertáblája?

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|---|
| 1 | | 1 | | -1 | |
| 1 | | 1 | -1 | | |
| | | | | | |
| | 2 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| 1 | | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 2 | -2 | -1 | 1 | | |