1. *Bizonyítsuk be, hogy $n \leq 6$-ra S_n-nek minden nilpotens részcsoportja kommutatív vagy p-csoport. Keressük meg (konjugáltság erejéig) S_7-ben az összes nem kommutatív nilpotens részcsoportot!*

Megoldás:

Egy nilpotens csoport a Sylowjainak a direkt szorzata, tehát csak úgy lehet nem Abel, ha valamelyik Sylowja nem Abel (következésképpen legalább p^3 rendű). S_6-ba, sőt S_7-be is ilyenből csak 2^3 vagy 2^4 rendű fér bele. Mivel a 2-Sylow nem Abel, van 4-edrendű eleme, és van a csoportban még valamilyen p-edrendű elem is (p páratlan prím). A nilpotencia miatt ezek felcserélhetők, és a szorzatuk rendje $\geq 4p$, viszont ilyen rendű elem csak $n \geq 4 + p$ elemű alaphalmazon valósítható meg, vagyis $n \geq 7$, és $n = 7$ esetén $p = 3$.

Tekintsük most az $n = 7$ esetet. Láttuk, hogy 2-n és 3-on kívül más prímmel nem lehet osztható a H nilpotens részcsoport. Ha H tartalmazza S_7-nek egy teljes 3-Sylowját (legyen ez $P = \langle(123), (456)\rangle$), akkor $C_G(P)$ önmagába viszi P minden elemének a fixponthalmazát (általában, ha $[g, h] = 1$, akkor $\mathrm{Fix}(g)h = \mathrm{Fix}(g)$), így $H \leq S_3 \times S_3 \times 1$, ami ellentmond annak, hogy $|H|$ osztható 8-cal. Ha H 3-Sylowját egy két háromciklusból álló elem, mondjuk, $(123)(456)$ generálja, akkor $|H| \mid |C_{S_7}((123)(456))| = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$, megint ellentmondás. Végül, ha H 3-Sylowját egy háromciklus generálja, mondjuk, (123), akkor $H \leq C_{S_7}((123)) = C_3 \times S_4$, és ebből $H = C_3 \times D_4$. Mivel H 2-Sylowja az $S_{\{4,5,6,7\}}$ egyik 2-Sylowja, az összes ilyen csoport konjugált egymással, tehát konjugáltság erejéig $\langle(123), (4567), (46)\rangle$ az egyetlen ilyen részcsoport.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha M maximális részcsoportja egy G véges feloldható csoportnak, akkor $|G : M|$ prímhatvány.*

Megoldás: A G rendjére vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. Mivel G feloldható, van olyan N normálosztója, amely Abel p-csoport. Ha $N \leq M$, akkor M/N maximális részcsoport G/N-ben, és $|G : M| = |(G/N) : (M/N)|$ prímhatvány az indukciós feltevés szerint. Ha $N \not\leq M$, akkor $MN = G$, és $|G : M| = |MN : M| = |N : M \cap N| \mid |N|$ p-hatvány.

3. *Bizonyítsuk be, hogy egy nilpotens csoportban minden nem triviális normálosztó metszi a centrumot!*

Megoldás: Legyen $1 = N_0 < N_1 < \cdots < N_k = G$ egy centrállánc, és $1 \neq N \lhd G$, továbbá legyen i a legnagyobb index, amire $N_i \cap N = 1$ (nyilván $i < k$). Ekkor $[N_{i+1} \cap N, G] \leq [N_{i+1}, G] \leq N_i$ és $[N_{i+1} \cap N, G] \leq [N, G] \leq N$ (mivel N normálosztó), így $[N_{i+1} \cap N, G] \leq N_i \cap N = 1$, azaz $1 \neq N_{i+1} \cap N \leq Z(G)$.

4. *Legyen $x, y \in G$. Bizonyítsuk be, hogy*

a) $[x, y] = [y, x]^{-1}$;

b) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$ *és* $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$;

c) $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$, *ahol* $[x, y, z] := [[x, y], z]$.

Megoldás: a) $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = (y^{-1}x^{-1}yx)^{-1} = [y, x]^{-1}$

b) $[xy, z] = y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz = y^{-1}(x^{-1}z^{-1}x)yz = y^{-1}(x^{-1}z^{-1}xz)z^{-1}yz = y^{-1}[x, z]yy^{-1}z^{-1}yz = [x, z]^y[y, z]$

$[x, yz] = x^{-1}z^{-1}y^{-1}xyz = x^{-1}z^{-1}(y^{-1}xy)z = x^{-1}z^{-1}x(x^{-1}y^{-1}xy)z = (x^{-1}z^{-1}xz)z^{-1}(x^{-1}y^{-1}xy)z = [x, z][x, y]^z$

c) A kifejezést kifejtve, egyszeűsítések után 1-et kapunk.

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B, C \lhd G$, akkor*

a) $[A, B] \lhd G$;

b) $[A, B] = [B, A]$;
c) $[AB, C] = [A, C][B, C]$;
d) $[A, B, C] \leq [B, C, A][C, A, B]$.

Megoldás: a) Az $[A, B]$ generátorelemeit a g-vel való konjugálás egymás között permutálja: $[a, b]^g = (a^{-1}b^{-1}ab)^g = (a^g)^{-1}(b^g)^{-1}a^g b^g = [a^g, b^g]$, így $[A, B]$-t önmagába viszi.
b) A 4.a) feladat szerint $[A, B]$ generátorelemei $[B, A]$-nak is elemei, és fordítva.
c) A 4.b) szerint $[ab, c] = [a, c]^b[b, c] = [a^b, c^b][b, c] \in [A, C][B, C]$, másrészt $[A, C]$ és $[B, C]$ nyilván benne vannak $[AB, C]$-ben.
d) Az a) rész szerint $[A, B, C]$, $[B, C, A]$ és $[C, A, B]$ mindegyike normálosztó, és így $N := [B, C, A][C, A, B]$ is az. A 4.c) feladat állítását $x = a$, $y = b^{-1}$, $z = c$-re alkalmazva, és az egyenlőséget átrendezve azt kapjuk, hogy $[a, b, c] = ([c, a^{-1}, b^{-1}]^{-1})^{ab}([b^{-1}, c^{-1}, a]^{-1})^{cb} \in [C, A, B][B, C, A] = [B, C, A][C, A, B] = N$. Így a G/N faktorcsoportban minden $[a, b]$ kommutátorelem fölcserélhető C minden elemével, következésképpen itt $[A, B]$ minden eleme is fölcserélhető C elemeivel, azaz $[A, B, C] \leq N$.

6. *Legyen G nilpotens csoport, amelynek fölső centrállánca $1 = Z_0 < Z_1 < \cdots < Z_k = G$, és ferde kommutátorlánca $G = K_1 > K_2 > \cdots > K_{k+1} = 1$. Bizonyítsuk be, hogy*
a) $[Z_j, K_i] \leq Z_{j-i}$, *ha* $j \geq i$;
b) $[K_{i+1}, K_{k-i}] = 1$, *minden* $i \geq 0$*-ra.*

Megoldás: a) i-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. $i = 1$-re $[Z_j, K_1] = [Z_j, G] \leq Z_{j-1}$. Ha valamely i-re tetszőleges $j \geq i$-vel igaz az állítás, akkor $j \geq i+1$-re $[Z_j, K_{i+1}] = [Z_j, [K_i, G]] = [[K_i, G], Z_j]$, ami az 5.d) feladat szerint $\leq [[G, Z_j], K_i][[Z_j, K_i], G] \leq [Z_{j-1}, K_i][[Z_j, K_i], G]$, és ez az indukciós feltevés miatt $\leq Z_{j-i-1}[Z_{j-i}, G] \leq Z_{j-i-1}Z_{j-i-1} = Z_{j-i-1}$.
b) Tudjuk, hogy a fölső centrállánc minden más centrállánc fölött van, így $K_{k-i} \leq Z_{i+1}$, és az a) rész miatt $[K_{i+1}, K_{k-i}] \leq [K_{i+1}, Z_{i+1}] \leq Z_0 = 1$.

7. *Legyen M c nilpotenciaosztályú, N pedig d nilpotenciaosztályú normálosztó G-ben. Bizonyítsuk be, hogy MN is nilpotens normálosztó, amelynek nilpotenciaosztálya legföljebb $c + d$.*

Megoldás: Az 5.c) állítást rekurzívan alkalmazva mindkét változójában azt kapjuk, hogy X_i, Y_j ($i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$) normálosztókra $[X_1 \cdots X_m, Y_1 \cdots Y_n] = [X_1, Y_1][X_2, Y_1] \cdots [X_m, Y_1] \cdots [X_m, Y_n]$. Legyen H_i az $[X_1, \ldots, X_i]$ normálosztók (komplexus)szorzata, ahol minden X_j vagy M, vagy N. Az előbbi összefüggést használva indukcióval beláthatjuk, hogy $H_i = K_i(MN)$ minden i-re. H_{c+d+1} olyan $[X_1, \ldots, X_{c+d+1}]$ normálosztók szorzata, amelyek komponense M-ek és N-ek, és vagy legalább $c + 1$ darab M van, vagy legalább $d + 1$ darab N. Felhasználva még, hogy $[A, B] \leq A$, ha $A \lhd G$, láthatjuk, hogy H_{c+d+1} mindegyik szorzótényezője vagy $K_{c+1}(M)$-ben, vagy $K_{d+1}(N)$-ben van. Mivel $cl(M) = c$ és $cl(N) = d$, $K_{c+1}(M) = K_{d+1}(N) = 1$, és így $K_{c+d+1}(MN) = H_{c+d+1} = 1$, vagyis $cl(MN) \leq c + d$.

8. *Bizonyítsuk be, hogy egy G véges csoportban létezik legnagyobb nilpotens normálosztó (azaz olyan, amelyik minden más nilpotens normálosztót tartalmaz). Ez a Fitting-részcsoport, $F(G)$.*

Megoldás: A 7. feladatban láttuk, hogy nilpotens normálosztók szorzata is nilpotens normálosztó, és véges csoportban csak véges sok ilyen normálosztót kell összeszorozni, hogy megkapjuk a legnagyobb nilpotens normálosztót. Egyébként azt, hogy két nilpotens normálosztó, M és N szorzata is nilpotens (a nilpotenciaosztály meghatározása nélkül) könnyebben is bizonyíthatjuk, a G rendjére vonatkozó indukcióval. Ha $M \cap N = 1$, akkor $MN = M \times N$, így MN nilpotens. Ha viszont $M \cap N \neq 1$, akkor $Z_1 = M \cap N \cap Z(M) \cap Z(N) \neq 1$. A G/Z_1 csoportban M/Z_1 és N/Z_1 nilpotens normálosztók, így az indukciós feltevés miatt MN/Z_1 is nilpotens. Az MN/Z_1 egy centrálláncának az ősképét kiegészítve az 1-gyel, MN-nek is centrálláncát kapjuk, mivel $Z_1 \leq Z(M) \cap Z(N) \leq Z(MN)$. Tehát MN is nilpotens.

9. *Bizonyítsuk be, hogy egy véges feloldható csoportnak minden nem triviális normálosztója metszi a Fitting-részcsoportot!*

Megoldás: Legyen G feloldható, $F(G)$ az G Fitting-részcsoporja, és $1 \neq N \triangleleft G$. Legyen k a legnagyobb nemnegatív egész, amelyre $N^{(k)} \neq 1$ (ilyen van, mert G feloldhatósága miatt N is feloldható, tehát a kommutátorlánca eléri az 1-et). Ekkor $N^{(k)}$ kommutatív, és ha $N^{(k)} \cap F(G) = 1$, akkor $N^{(k)}F(G) = N^{(k)} \times F(G)$ nilpotens normálosztó, ellentmondva annak, hogy $F(G)$ a legnagyobb nilpotens normálosztó G-ben. Tehát $N \cap F(G) \geq N^{(k)} \cap F(G) > 1$.

Hf1. *Legyen $N, K \triangleleft G$, ahol K nilpotens, és N minimális normálosztó a G-ben. Bizonyítsuk be, hogy $N \leq C_G(K)$.*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy ha $G' \leq Z(G)$, akkor bármely $x, y \in G$-re és n pozitív egész számra $(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{2}}$.*