1. *Határozzuk meg ekvivalencia erejéig az összes olyan tranzitív permutációcsoportot, amely izomorf S_4-gyel!*

Megoldás: Egy G csoport minden tranzitív csoporthatása equivalens egy H részcsoport mellékosztályain való hatással, ahol a stabilizátor H, a csoporthatás magja pedig a G-nek H-ban levő legnagyobb normálosztója. Tehát hűséges primitív csoporthatást akkor kapunk, ha a H maximális részcsoport, és H-ban nincs nem triviális normálosztó.

Tegyük fel, hogy $H \leq S_4$ ilyen részcsoport. Ha $H \leq A_4$, akkor $H = A_4$ a maximalitás miatt, de $A_4 \triangleleft S_4$. Tehát H-ban van páratlan permutáció: 2-ciklus vagy 4-ciklus. Ha H 2-csoport, akkor H benne van egy 2-Sylowban, így egyenlő azzal, viszont minden 2-Sylow tartalmazza a Klein-csoportot, ami normálosztó. Tehát H-ban van 3-adrendű elem is. A 4-ciklus esetében feltehető: $(1234), (123) \in H$, de akkor $(34) = (1234)(123)^{-1} \in H$, tehát elég a 2-ciklus esetét megnézni. Ebből lényegében két eset van: $(12), (123) \in H$ vagy $(12), (134) \in H$. Az elsőből következik, hogy $S_3 \leq H$, de S_3 maximális S_4-ben, mert az S_4 primitív csoport stabilizátora, így ekkor $H = S_3$ kellene, hogy legyen, és az az S_4-nek a természetes reprezentációját adja. A második esetben $a = (12), b = (134), c = b^a = (234), b^c = (142) \in H$, vagyis ezt is visszavezettük az előző esetre. Tehát S_4-nek a természetes reprezentációja az egyetlen hűséges primitív reprezentáció.

2. *Tegyük fel, hogy $G \leq S_\Omega$ primitív, és $|G|$ nem prím. Bizonyítsuk be, hogy minden $\alpha, \beta \in \Omega$-ra $\alpha \neq \beta$ esetén $\langle G_\alpha, G_\beta \rangle = G$.*

Megoldás: Tegyük fel, hogy van olyan $\alpha \neq \beta$, amelyre $\langle G_\alpha, G_\beta \rangle < G$. Mivel a stabilizátorok maximális részcsoportok a primitivitás miatt, ez csak úgy lehet, ha $G_\alpha = G_\beta$. Tekintsük az Ω-nak azt a partícióját, amelyben két elem akkor kerül egy osztályba, ha megegyezik a stabilizátoruk. Az előbbi feltevés szerint ennek a partíciónak az osztályai nem mind egyeleműek. Az sem lehet, hogy egy osztály van, mert akkor minden stabilizátor megegyezne, de a metszetük 1, így a stabilizátorok triviálisak, és egyúttal maximális részcsoportok is, vagyis G csak prím rendű lehetne. Tehát ez a partíció nem triviális. Másrészt G-invariáns is, hiszen $G_\alpha = G_\beta$ esetén $G_{\alpha g} = (G_\alpha)^g = (G_\beta)^g = G_{\beta g}$, ami ellentmond annak, hogy G primitív.

3. *Bizonyítsuk be, hogy ha a G véges csoportnak van olyan másodrendű automorfizmusa, amely fixpontmentes $G \setminus \{1\}$-en, akkor G Abel-csoport.*

Megoldás: Legyen σ a feladatban szereplő automorfizmus. Ez az automorfizmus az $x^{-1}x^\sigma$ alakú elemeken invertálással hat: $(x^{-1}x^\sigma)^\sigma = (x^\sigma)^{-1}x^{\sigma^2} = (x^\sigma)^{-1}x = (x^{-1}x^\sigma)^{-1}$.

Másrészt az $x \mapsto x^{-1}x^\sigma$ leképezés injektív, mert ha $x^{-1}x^\sigma = y^{-1}y^\sigma$, akkor $yx^{-1} = y^\sigma(x^\sigma)^{-1} = (yx^{-1})^\sigma$, de σ-nak az 1 az egyetlen fixpontja, ezért ekkor $yx^{-1} = 1$, azaz $x = y$. Mivel G véges, az előbb definiált injektív leképezés szürjektív is, vagyis G minden eleme $x^{-1}x^\sigma$ alakú, és ezért σ invertálással hat az egész G-n.

Végül, ha az invertálás automorfizmus egy G csoporton, akkor minden x, y-ra $x^{-1}y^{-1} = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, tehát $yx = xy$ minden x, y-ra, azaz G Abel-csoport.

Egy $G \leq S_n$ permutációcsoport $\frac{1}{2}$-tranzitív, ha minden orbitja ugyanakkora.

G $k + \frac{1}{2}$-tranzitív, ha G k-tranzitív, és $G_{1,2,\ldots,k}$ $\frac{1}{2}$-tranzitív a többi elemen.

4. *Tegyük fel, hogy $G \leq S_n$ 2-tranzitív. Bizonyítsuk be, hogy G-nek minden nem triviális normálosztója $\frac{3}{2}$-tranzitív.*

Megoldás: G 2-tranzitív, így primitív is, tehát minden $1 \neq N$ normálosztója tranzitív. Legyen $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega$, és $\beta, \gamma \neq \alpha$. Azt kell belátni, hogy $|\beta N_\alpha| = |\gamma N_\alpha|$. Mivel $N \triangleleft G$,

$N_\alpha = N \cap G_\alpha \triangleleft G_\alpha$. A G 2-tranzitivitása miatt van olyan $g \in G_\alpha$, amelyre $\beta g = \gamma$, és így $|\gamma N_\alpha| = |\beta g N_\alpha| = |\beta N_\alpha g| = |\beta N_\alpha|$.

5. *Bizonyítsuk be, hogy az M_{12} Mathieu-csoport egyszerű.*

Megoldás: M_{12}-t mint az ekvivalencia erejéig egyetlen 12-edfokú, szigorúan 5-tranzitív csoportot definiáltuk. Legyen tehát $G \leq S_{12}$ szigorúan 5-tranzitív, és H a 12 stabilizátora. Ekkor H mint S_{11} részcsoportja szigorúan 4-tranzitív, így az előadáson bizonyított tétel szerint H egyszerű. Ha most $1 \neq N \triangleleft G$ minimális nem triviális normálosztó, akkor $N \cap H \triangleleft H$, tehát H egyszerűsége miatt vagy $N \cap H = 1$, vagy $N \geq H$. Az első esetben $|N| \leq |G : H| = 12$, de G primitivitása miatt N tranzitív, így legalább 12-elemű, vagyis $|N| = 12$. Viszont 12-elemű karakterisztikusan egyszerű csoport nem létezik (vagy a 3-Sylow, vagy a 2-Sylow karakterisztikus részcsoport benne), és ez ellentmond N minimalitásának. Ha viszont $N \geq H$, akkor $H \neq N$ következik például abból, hogy N tranzitív, tehát H maximalitása miatt $N = G$.

6. *Hány eleme van a $GL_n(q)$, $SL_n(q)$ és $PSL_n(q)$ csoportoknak?*

Megoldás: $GL_n(q)$ elemeit lehet úgy tekinteni, mint a q-elemű test fölötti $n \times n$-es invertálható mátrixokat. Az ilyen mátrixokat megszámolhatjuk úgy, hogy soronként töltjük ki a mátrixot, és minden sorba olyan vektort írhatunk, ami nem lineáris kombinációja az előző — lineárisan függetlennek választott — soroknak. Így a lehetséges mátrixok száma $(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{n-1})$.

$SL_n(q)$ a $\varphi : GL_n(q) \to \mathbb{F}_q^\times$, $\varphi : A \mapsto \det A$ csoporthomomorfizmus magja. Ez a homomorfizmus nyilván szürjektív, így a mag mérete $|GL_n(q)|/(q-1)$.

$PSL_n(q)$-t úgy kapjuk meg, ha $SL_n(q)$-t az 1 determinánsú skalármátrixok által alkotott normálosztóval faktorizáljuk le. Tehát azt kell összeszámolni, hogy $x^n - 1$-nek hány gyöke van $\mathbb{F}_q$-ban. Ezek a gyökök a $(q-1)$-elemű ciklikus multiplikatív csoportban is benne vannak, és a rendjük $(q-1)$-nek is, tehát $(n, q-1)$-nek is osztója. Másrészt a ciklikus csoportban az ilyen rendű elemek az egyetlen $(n, q-1)$-elemű részcsoport elemei, tehát a számuk $(n, q-1)$. Következésképpen $|PSL_n(q)| = |GL_n(q)|/((q-1)(n, q-1))$.

7. *Bizonyítsuk be a következő izomorfiákat:*

$$PSL_2(2) \cong S_3; \quad PSL_2(3) \cong A_4 \text{ (Hf.)}; \quad PSL_2(4) \cong A_5$$

$$PSL_2(9) \cong A_6; \quad PSL_2(7) \cong PSL_3(2); \quad PSL_4(2) \cong A_8$$

(Felhasználhatjuk, hogy $PSL_n(q)$ egyszerű, ha $n > 2$ vagy $n = 2$ és $q > 3$.)

Megoldás: $PSL_2(2) = GL_2(2)$, és ennek elemszáma $(2^2 - 1)(2^2 - 2) = 6$, továbbá $GL_2(2)$ nyilván nem kommutatív, így csak S_3-mal lehet izomorf.

$|PSL_2(4)| = (4^2 - 1)(4^2 - 4)/3 = 15 \cdot 12/3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, és egyszerű csoport, így a 6/Hf2. feladat speciális eseteként azt kapjuk, hogy csak az alternáló csoport lehet.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy egy véges reguláris csoport akkor és csak akkor primitív, ha prím rendű.*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy $PSL_2(3) \cong A_4$.*