1. *Tegyük föl, hogy a $G \le S_\Omega$ permutációcsoport tranzitívan hat az Ω alaphalmaz 2-elemű részhalmazain, és $|\Omega| \ge 3$. Bizonyítsuk be, hogy G tranzitív, sőt primitív Ω-n.*

Megoldás: Először vegyük észre, hogy $G \ne 1$, mert Ω-ban van három különböző elem: α, β, γ, és ahhoz olyan $g \in G$, amelyre $\{\alpha g, \beta g\} = \{\alpha, \gamma\} \ne \{\alpha, \beta\}$.

Ha G nem tranzitív, akkor $G \ne 1$ miatt van 1-nél több elemű valódi Ω_1 orbitja, viszont ennek egy kételemű részhalmazát valamelyik elem át tudja vinni egy olyan kételemű halmazba, ami nincs (teljesen) Ω_1-ben.

Ha G imprimitív, akkor van egy Δ blokkja. Ha $\alpha, \beta \in \Delta$ különbözők, és $\gamma \in \Omega \setminus \Delta$, akor van olyan $g \in G$, amelyre $\{\alpha g, \beta g\} = \{\alpha, \gamma\}$, így Δ és Δg két nem egyenlő, metsző halmaz, ami ellentmond annak, hogy Δ blokk. Tehát G primitív.

2. *Bizonyítsuk be, hogy a $G = \langle x, y \mid y^{-1}xy = x^2,\ y^3 = 1 \rangle$ csoport véges. Határozzuk meg G rendjét!*

Megoldás: A generáló relációkból következik, hogy $x = 1^{-1}x1 = y^{-3}xy^3 = x^{2^3} = x^8 \Rightarrow x^7 = 1$. Továbbá $y^{-1}xy = x^2 \in \langle x \rangle \Rightarrow \langle x \rangle \lhd G \Rightarrow G = \langle x, y \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle \Rightarrow |G| \le |\langle x \rangle| \cdot |\langle y \rangle| \le 7 \cdot 3 = 21$.

21-edrendű csoport viszont van is, ami kielégíti a relációkat: legyen $H = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle \cong C_7 \rtimes C_3$, ahol $a^b = a^2$ (ilyen van, mert C_7-ben a négyzetre emelés harmadrendű automorfizmus). Tehát H homomorf képe G-nek, és 21 elemű, így $|G| = 21$.

3. *Írjuk le mindazokat a véges egyszerű (irányítatlan) gráfokat, amelyeknek az automorfizmuscsoportja 2-tranzitív a csúcsokon, illetve 2-tranzitív az éleken!*

Megoldás: Ha az automorfizmuscsoport 2-tranzitív a csúcsokon, akkor a gráf vagy üres, vagy ha van éle, akkor minden csúcspárt él köt össze, tehát a gráf teljes gráf.

Most tegyük fel, hogy az automorfizmuscsoport 2-tranzitív az éleken. Ha van két olyan él, amelyeknek van közös csúcsuk, akkor bármely két élnek van közös csúcsa, tehát a gráf vagy egy csillagból legalább 3 csúcsú csillagból és izolált pontokból áll, vagy egy háromszögből és izolált pontokból. Ha ilyen élek nincsenek, akkor a gráf komponensei kételeműek (legalább két ilyen komponens van) és egyeleműek. Ennek a háromfajta gráfnak valóban 2-tranzitív az automorfizmuscsoportja az éleken.

4. *Bizonyítsuk be, hogy $F(x, y)$-ban az x^2 által generált normálosztó végtelen rangú!*

Megoldás: A bizonyításhoz a Nielsen–Schreier-tétel konstrukcióját használjuk: be kell látni, hogy egy Schreier-transzverzálisból végtelen sok él megy kifelé.

Legyen N az x által generált normálosztó, és M az x által generált. $F(x, y)/M = \langle \overline{y} \rangle \cong C_\infty \Rightarrow y^n \notin M \Rightarrow y^n \notin N$, ha $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Így az $\{y^n, xy^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ halmaz az N bármely bal mellékosztályából maximum 1 elemet tartalmaz (N minden elemében az x kitevőinek összege páros, így $y^{-m}xy^n \notin N$, és az előbbi észrevétel szerint $y^{-m}y^n = y^{n-m}$ és $(xy^m)^{-1}(xy^n) = y^{n-m}$ sincs N-ben, ha $n \ne m$), és összefüggő részgráfot feszít ki a Cayley-gráfban, így kiegészíthető egy T transzverzálissá (összefüggő részgráffá, amely teljes reprezentánsrendszer). T-nek az xy^n elemeiből kifelé mennek az x élek, mert $x^2y^n = y^n(y^{-n}x^2y^n) \in y^nN$, és y^n benne van T-ben ebből a mellékosztályból. Így a H szabad generátorrendszerének van végtelen sok eleme.

5. *Határozzuk meg az $GL_2(7)$ csoport 3-Sylowjának izomorfiatípusát.*

Megoldás: $|GL_2(7)| = (7^2-1)(7^2-7) = 48 \cdot 42 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, tehát a 3-Sylow 9-elemű. Viszont 9-elemű részcsoportja a diagonális mátrixok csoportjának is van: ez $\cong \mathbb{F}_7^\times \times \mathbb{F}_7^\times \cong C_6 \times C_6$, és ebben a 3-Sylow $\cong C_3 \times C_3$.

6. *Bizonyítsuk be (a Feit–Thompson-tétel alkalmazása nélkül), hogy ha G véges nem kommutatív egyszerű csoport, p osztója $|G|$-nek, és G p-Sylowja ciklikus, akkor $(|G|, p-1) > 1$.*

Megoldás: Legyen $P \in Syl_p(G)$, és tegyük fel, hogy az állítással ellentétben $(|G|, p-1) = 1$. Ha $P \cong C_{p^n}$, akkor $N_G(P)/C_G(P) \leq \mathrm{Aut}\, C_{p^n} \cong C_{(p-1)p^{n-1}}$, így $k := |N_G(P)/C_G(P)|$-re $k \mid (p-1)p^{n-1}$. De $k \mid |G : C_G(P)| \mid |G : P|$, és $|G : P|$ se p-vel, se $p-1$ prímosztóival nem osztható, így $k = 1$. Mivel G nem kommutatív, tehát $G \neq P$, a Burnside-féle normál p-komplementumtételből következik, hogy G-nek van valódi normálosztója, ellentmondva a G egyszerűségének.

Az első zh első feladata:

7. *Bizonyítsuk be, hogy egy véges nilpotens csoportban minden részcsoporthoz van olyan normállánc, amelynek ez a csoport eleme! Mutassunk példát arra, hogy feloldható csoportokra nem igaz ez az állítás!*

Megoldás: G-hez $1 \triangleleft G$ ilyen. Legyen most $H < G$, és definiáljuk a $H_0 = 1$, $H_1 = H$, és $H_i < G$ esetén $H_{i+1} = N_G(H_i)$ csoportokat. Mivel G nilpotens $H_i < N_G(H_i)$, így a végesség miatt van olyan k, amelyre $H_k = G$, és így $1 = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft H_1 \triangleleft \cdots \triangleleft H_k = G$.

S_3-ban egy másodrendű részcsoport nem foglalható normálláncba, mert azt már valódi módon csak az egész S_3 tartalmazza, de abban a másodrendű részcsoport nem normálosztó.