

Csoportelmélet összefoglaló

2012 tavasz

Csoportok felépítése Direkt szorzat részcsoporthatás, Krull–Schmidt-tétel. szemidirekt szorzat, **(T)** Schur–Zassenhaus-tétel Abel esete. $\text{Aut } C_n$.

Permutációcsoportok Csoportthatás, hűségesség, hatás, orbit és stabilizátor. **(T)** Burnside-lemma (a fixpontokról). **(T)** $C_{S_n}(A_n) = 1$, ha $n \geq 4$. S_n normálosztói, kis indexű részcsoporthatásai, **(T)** $\text{Aut } S_n \cong \text{Aut } A_n \cong S_n$, ha $n \geq 7$.

Kommutátor-részcsoporthatás Kommutátorelem, két részcsoporthatás kommutátora, G' és a tulajdonságai, kommutátorlánc.

Feloldható csoportok Normállánc, feloldhatósági hossz. Mire öröklődik a feloldhatóság? **(T)** Burnside tétele a $p^\alpha q^\beta$ rendű csoportokról (biz. ld. repr. elm.). Hall-részcsoporthatások, Sylow-bázisok. **(T)** A feloldhatóság Hall-féle ekvivalensei. **(T)** Hall-tételek. Feit–Thompson-tétel.

Nilpotens csoportok Centrállánc, nilpotens csoport, felső centrállánc, ferde kommutátorlánc, **(T)** centrálláncok összehasonlítása, nilpotenciahossz. Mire öröklődik a nilpotencia? **(T)** A nilpotencia ekvivalensei. **(T)** Schur–Zassenhaus-tétel, általános eset.

Frattini-részcsoporthatás, p -csoportok Frattini-részcsoporthatás ($\Phi(G)$), $\Phi(G)$ jellemzése, **(T)** $\Phi(G)$ és a nilpotencia, **(T)** $G/\Phi(G)$ leírása p -csoportokra, **(T)** p^n rendű csoport maximális nilpotenciahossza, **(T)** Hamilton-csoportok leírása.

Transzfer Transzfer definíciója, tulajdonságai, gT felírása g -hatványok konjugáltjaival, transzfer a centrumra. **(T)** Végesen generált csoport véges indexű részcsoporthatásja. **(T)** Schur-tétel ($|G : Z(G)| < \infty \Rightarrow |G'| < \infty$). **(T)** Burnside-féle p -komplementum-tétel. **(T)** Minden négyzetmentes rendű csoport feloldható, sőt metaciklikus.

Tranzitív és primitív permutációcsoportok k -tranzitivitás, GL , AGL , SL , PGL , PSL . Primitív és imprimitív csoportok, **(T)** a primitivitás ekvivalens feltételei. **(T)** Primitív csoport normálosztója. Tranzitív és primitív csoportthatások, koszorúszorzat. Szemireguláris, reguláris és szigorúan k -tranzitív csoportok. **(T)** Jordan tétele a szigorúan k -tranzitív csoportokról ($k \geq 4$).

Egyszerű csoportok **(T)** M_{11} egyszerűsége, **(T)** $PSL_n(q)$ egyszerűsége ($n \geq 3$ vagy $n = 2$ és $q \geq 4$).

Szabad csoportok, relációkkal definiált csoportok Szabad csoport konstrukciója szavakból, szabad csoport jellemzése, szabad Abel-csoport, **(T)** izomorf szabad csoportok rangja megegyezik. Definiáló relációk, Dyck-tétel. Cayley-gráfok, szabad csoport Cayley-gráfja, **(T)** Nielsen–Schreier-tétel: szabad csoport részcsoporthatásja szabad. **(T)** Véges rangú szabad csoport véges indexű részcsoporthatásának rangja.

Csoportrepresentációk \mathbb{C} fölötti reprezentáció, karakter ($\mathbb{C}G$ -re kiterjesztve is), irreducibilis reprezentáció, reprezentációk ekvivalenciája. Maschke-tétel, **(T)** $\mathbb{C}G \cong \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$, köv.: $|G| = \sum_{\chi \in \text{Irr } G} \chi(1)^2$. $\text{Ker } \chi$, $Z(\chi)$, és az ezekre vonatkozó állítások. Ortogonalitási relációk, osztályfüggvények, $[\chi, \psi]$. $\text{Irr } G$ ortonormált bázis az osztályfüggvények terében; ennek a következményei. Műveletek karakterekkel, lineáris karakterek, karaktertábla. **(T)** $\chi \in \text{Irr } G$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(g)$ -re $\frac{\chi(g) \cdot |\mathcal{K}|}{\chi(1)}$ algebrai egész. **(T)** $\chi \in \text{Irr } G \Rightarrow \chi(1) \mid |G|$.

(T) Burnside: $\chi \in \text{Irr } G$, $g \in \mathcal{K}$ -ra $(\chi(1), |\mathcal{K}|) = 1 \Rightarrow |\chi(g)| = \chi(1)$ vagy 0 . **(T)** $p^\alpha q^\beta$ rendű csoportok feloldhatósága.