1. Keressünk minimális fokú tranzitív, ill. nem feltétlenül tranzitív hűséges permutáció-reprezentációt a következő csoportokhoz!

a) C_{10} b) D_6 c) $\langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle \cong C_5 \rtimes C_4$, ahol $a^b = a^2$

2. Tekintsük az S_5 hatását a konjugálással az 5-Sylowjain! Bizonyítsuk be, hogy ez az S_5-nek olyan beágyazását adja S_6-ba, ahol S_5 képének harmadrendű elemei fixpontmentesek.

3. Legyen $H, K \le S_n$ úgy, hogy $|S_n : H| = |S_n : K| = n$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $\sigma \in \operatorname{Aut} S_n$, amelyre $H\sigma = K$.

4. Lássuk be, hogy $|\operatorname{Aut} S_6| > |S_6|$.

Az 5., 6., 7. feladat a Sylow-tételek egy permutációcsoportos bizonyításához ad útmutatást.

5. Legyen $|G| = p^a m$, ahol a p prím nem osztója m-nek, és hattassuk G-t a jobbszorzással a $\binom{p^a m}{p^a}$ darab p^a elemű részhalmazon. Mutassuk meg, hogy ekkor minden orbit

a) vagy egyrétegűen fedi le G-t, m elemű, és pontosan egy részcsoport van az orbit elemei között,

b) vagy átfedéssel fedi le G-t, p-vel osztható elemszámú, és nincs benne részcsoport.

6. Bizonyítsuk be, hogy $\binom{p^a m}{p^a} \equiv m \ (mod\ p)$ (alkalmazzuk az előző feladatot a $p^a m$ rendű ciklikus csoportra), és lássuk be ebből, hogy $|Syl_p(G)| \equiv 1 \ (mod\ p)$.

7. Tekintsük G hatását $Syl_p(G)$-n a konjugálással. Lássuk be, hogy

a) egy Q p-részcsoport akkor és csak akkor hagy helyben egy P p-Sylowot, ha $Q \le P$;

b) minden p-részcsoport beágyazható egy p-Sylowba;

c) G tranzitívan hat $Syl_p(G)$-n.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha egy csoport kommutátor részcsoportja véges, akkor minden konjugáltosztálya is véges.

9. Lássuk be, hogy $H, K \le G$-re $H \le N_G([H, K])$.

10. Tegyük fel, hogy a G nem kommutatív csoport minden valódi normálosztója kommutatív. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G/G' véges.

Hf1. Melyik az a legkisebb n, amelyre a kvaterniócsoport beágyazható S_n-be? Adjuk is meg a Q két generátorelemének a képét ennél a csoportreprezentációnál!

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy ha H maximális részcsoport G-ben, akkor $H \ge Z(G)$ vagy $H \ge G'$.

Hf3. Határozzuk meg egy legalább három elemű K test fölötti 2×2-es invertálható felső háromszögmátrixok multiplikatív csoportjának kommutátor részcsoportját.