1. Bizonyítsuk be, hogy ha az $M, N \triangleleft G$ normálosztókra G/M és G/N feloldhatók, akkor $G/(M \cap N)$ is feloldható.

2. Bizonyítsuk be, hogy minden véges csoportnak van egy legnagyobb (azaz minden más ilyet tartalmazó) feloldható normálosztója.

3. Bizonyítsuk be a Burnside-tétel nélkül, hogy minden pq, p^2q és p^2q^2 rendű csoport feloldható, ha $p \neq q$ prímek.

4. Milyen 1 és 150 közötti számokra van nem feloldható n-edrendű csoport?

5. Legföljebb milyen hosszú lehet egy 48 elemű csoport kommutátorlánca?

Hall-tételek:
Ha G véges, feloldható csoport, és $\pi \subseteq \mathcal{P}$, akkor
1) G minden π-részcsoportja benne van egy π-Hall-részcsoportban;
2) G bármely két π-Hall-részcsoportja konjugált egymással.

6. Bizonyítsuk be, hogy egy $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ rendű csoportban a Hall-rendszerek $(\{ R_1, \ldots, R_r \}$, ahol $R_i \in Hall_{p_i'}(G)\ \forall i)$, és a Sylow-bázisok $(\{ P_1, \ldots, P_r \}$, ahol $P_i \in Syl_{p_i}(G)\ \forall i$ és $P_iP_j = P_jP_i\ \forall i, j)$ között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van.

7. Bizonyítsuk be, hogy egy véges feloldható csoportban bármely két Hall-rendszer és bármely két Sylow-bázis konjugált egymással.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha $\{ P_1, \ldots, P_r \}$ Sylow-bázis G-ben, és $N \triangleleft G$, akkor
1) $\{ P_1 \cap N, \ldots, P_r \cap N \}$ Sylow-bázis N-ben, és
2) $\{ P_1N/N, \ldots, P_rN/N \}$ Sylow-bázis G/N-ben.

Hf1. Bizonyítsuk be (a Burnside-tétel nélkül), hogy minden p^3q rendű csoport feloldható, ha $p \neq q$ prímek.

Hf2. Határozzuk meg a $G = D_4 \rtimes D_4$ csoport kommutátorláncát, ha a szemidirekt szorzat konstrukciójában szereplő $\varphi : D_4 \to \operatorname{Aut} D_4$ izomorfizmus.