1. *Hány részcsoportja van az $S_3 \times S_3$ csoportnak?*

Megoldás: S_3 szeletei 1, 2, 3 vagy 6 eleműek lehetnek, az izomorfiatípusuk pedig 1, C_2, C_3 és S_3. Elég megszámolni az egyes izomorfiatípushoz tartozó szeletek számát, és az adott szelet automorfizmuscsoportjának rendjét. $1 = H/H$ minden $H \le S_3$-ra van, azaz 6 ilyen szelet létezik, és csak egy automorfizmusuk van. $C_2 \cong H/1$, ha H valamelyik 2-ciklus által generált csoport, illetve $C_2 \cong S_3/A_3$ (ez együtt 4 szelet), és $\operatorname{Aut} C_2 = 1$. C_3 típusú csak az $A_3/1$ szelet lehet, mert S_3-ban nincs másodrendű normálosztó, és harmadrendű részcsoport is csak egy van. $\operatorname{Aut} C_3 \cong C_2$. Végül az $S_3/1$ szelethez $\operatorname{Aut} S_3 \cong S_3$, ugyanis a (konjugálások által alkotott) belső automorfizmuscsoport $\cong S_3/Z(S_3) = S_3/1 \cong S_3$, és ennél nagyobb a teljes automorfizmuscsoport se lehet: $S_3 = \langle (12), (123) \rangle$, és (12) csak a három másodrendű elem valamelyikébe mehet, (123) pedig a két harmadrendű elem valamelyikébe. Így a részcsoportok száma: $6 \cdot 6 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 6 = 60$.

2. *Adjuk meg annak a szükséges és elégséges feltételét, hogy a $G_1 \times G_2$ csoportnak egy a $\varphi : H_1/N_1 \to H_2/N_2$ izomorfizmus grafikonjaként (ahol $N_i \triangleleft H_i \le G_i$) előálló részcsoportja normálosztó legyen! Ennek segítségével határozzuk meg $S_3 \times S_3$ normálosztóit!*

Megoldás: Egy G csoport H, K részcsoportjára $K \le N_G(H)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $[H, K] := \langle h^{-1}k^{-1}hk \mid h \in H,\ k \in K \rangle \le H$, ugyanis $h^{-1}k^{-1}hk \in H \ \Leftrightarrow\ k^{-1}hk \in H$. Speciálisan, $H \le G$ esetén $H \triangleleft G \ \Leftrightarrow [H, G] \le G$.

Legyen S a $\varphi : H_1/N_1 \to H_2/N_2$ izomorfizmus grafikonja. S akkor és csak akkor normálosztó $G_1 \times G_2$-ben, ha $G_1 \times 1,\ 1 \times G_2 \le N_{G_1 \times G_2}(S)$. Az előzőek szerint ennek a feltétele az, hogy $[S, G_1 \times 1] = \{([h_1, g_1], 1) \mid h_1 \in H_1, g_1 \in G\} \le S$, azaz, hogy $[H_1, G_1] \le N_1$, és ugyanígy $[H_2, G_2] \le N_2$. Ebből következik, hogy $[N_i, G_i] \le [H_i, G_i] \le N_i$, tehát $N_i \triangleleft G_i$, és az előbbi feltételt N_i-vel lefaktorizálva a $[H_i/N_i, G_i/N_i] = 1$ feltételt kapjuk a G_i/N_i faktorcsoportban. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $H_i/N_i \le Z(G_i/N_i)$. Összefoglalva, $S \triangleleft G$ akkor és csak akkor, ha $N_i \triangleleft G_i$, és $H_i/N_i \le Z(G_i/N_i)$ $i = 1, 2$-re.

S_3 normálosztói 1, A_3 és S_3, a faktorcsoportok centruma pedig rendre $Z(S_3/1) = 1$, $Z(S_3/A_3) = S_3/A_3$, és $Z(S_3/S_3) = Z(S_3/S_3)$. Így az első és a harmadik esetben csak $H_i = N_i$ lehet (a szelet a triviális csoport), a másodikban ezen kívül az S_3/A_3 szelet is szóba jön. Tehát normálosztók az 1, A_3 és S_3 csoportok direkt szorzatai tetszőleges párosításban (az 1 szelethez tartozó normálosztók), és az $S_3/A_3 \to S_3/A_3$ izomorfizmus grafikonja (ez 2 indexű normálosztó $S_3 \times S_3$-ban). Ez összesen $3 \cdot 3 + 1 = 10$ normálosztó.

3. *Izomorfia erejéig hány 21-edrendű, illetve 12-edrendű nemkommutatív csoport van?*

Megoldás: Ha $|G| = 21$, akkor $|Syl_7(G)| \equiv 1 \pmod 7$ és $|Syl_7(G)| \mid 3$ miatt $|Syl_7(G)| = 1$, következésképpen a 7-Sylow normálosztó, és a 3-Sylow a rendek miatt ennek komplementuma: $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle \cong C_7 \rtimes C_3$. $\operatorname{Aut} C_7 \cong C_6$ (a 3. hatványra emelés 6-odrendű automorfizmus), így a $\varphi : C_3 \to \operatorname{Aut} C_7$ homomorfizmus (ahol $\varphi \ne 1$, mert G nem Abel) csak kétféle lehet: $a^b = a^2$ vagy $a^b = a^{-3}$, így elvileg két lehetséges csoportot kapunk. Viszont az $a \mapsto a$, $b \mapsto b^2$ leképezés izomorfizmust definiál a két csoport között ($\langle b \rangle = \langle b^2 \rangle$, és ha $a^b = a^{-3}$, akkor $a^{b^2} = a^2$), tehát izomorfia erejéig csak egy nem kommutatív 21-edrendű csoport van.

Legyen most $|G| = 12$. A 3-Sylowok száma $|Syl_3(G)| \equiv 1 \pmod 3$ és $|Syl_3(G) \mid 4$ miatt 1 vagy 4. Ha $Syl_3(G)| = 1$, akkor $G = C_3 \rtimes P$, ahol a 2-Sylow-részcsoport $P \cong C_4$ vagy $C_2 \times C_2$. A $\varphi : P \to \operatorname{Aut}(C_3) \cong C_2$ képe csak a teljes C_2 lehet, mivel G nem kommutatív. Ilyen φ a $P \cong C_4$ esetben csak egy van, a $P \cong C_2 \times C_2$ esetben három is, de ezek mind izomorf szemidirekt szorztot adnak. Marad az az eset, amikor $|Syl_3(G)| = 4$. Mivel a 3-Sylowok prímrendű csoportok, "diszjunktak" is (azaz csak az 1-ben metszik egymást),

G-nek van 8 harmadrendű eleme, és a maradék 4 elemből csak egy 2-Sylow telik ki. Vagyis a 2-Sylow, P normálosztó, és $P \cong C_4$ vagy $C_2 \times C_2$, és $G \cong C_3 \rtimes P$. Az első esetben $\varphi : C_3 \to \mathrm{Aut}(C_4) \cong C_2$ miatt φ csak triviális lehetne, és akkor G Abel-csoport lenne. A másodikban $\mathrm{Aut}(C_2 \times C_2) \cong S_3$, amiben a harmadrendű automorfizmusok a $C_2 \times C_2$ három másodrendű elemét ciklikusan permutálják, tehát izomorfia erejéig csak egy ilyen csoportot kapunk (ami mellesleg izomorf az A_4-gyel). Tehát összesen 3 nem izomorf 12-edrendű nem kommutatív csoport van, és ezek $C_3 \rtimes C_4$, $D_3 \rtimes C_2 \cong D_6$, és A_4. (Az, hogy az első kettő nem izomorf, látható abból, hogy D_6-ban nincs negyedrendű elem.)

4. *Izomorf-e egymással a $Q \times C_2$, és a $C_4 \rtimes C_4$ csoport (az utóbbiban a második C_4 generátoreleme invertálással hat az elsőn)?*

Megoldás: Nem izomorfak, bár a csoportok rendje, és adott rendű elemeinek száma is megegyezik. A második csoportnak nyilván van C_4-gyel izomorf faktorcsoportja (a szemidirekt szorzatban szereplő C_4 normálosztóval lefaktorizálva), az elsőnek viszont minden negyedrendű normálosztója belemetsz a Q komponensbe, így tartalmazza a Q legkisebb nem triviális részcsoportját, $Z(Q) = \langle -1 \rangle$-et, akkor viszont a vele vett faktor faktora a $(Q \times C_2)/Z(Q) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$ csoportnak, de abban nincs negyedrendű elem, így nem lehet C_4-gyel izomorf faktora.

5. *Adjunk meg olyan N és H csoportot, amelyre létezik két nem izomorf $N \rtimes H$ szemidirekt szorzat, amelyek egyike sem direkt szorzat!*

Megoldás: Legyen $N = \langle a \rangle \cong C_5$, és $H = \langle b \rangle \cong C_4$. Mivel $\mathrm{Aut}(N) \cong C_4$, négyféle $\varphi : H \to \mathrm{Aut}\, N$ lehet: legyen G_i az az $N \rtimes H$ szemidirekt szorzat, amely az $a^b = a^i$ hatáshoz tartozik ($i = 1, 2, 3, 4$). Ezek közül G_1 direkt szorzat, és $G_2 \cong G_3$, mert G_3-ban $a^{b^{-1}} = a^{b^3} = a^{27} = a^2$, tehát az $a \mapsto a$ és $b \mapsto b^{-1}$ megfeleltetés — ami N-re, illetve H-ra megszorítvan nyilvánvalóan automorfizmust ad — izomorfia G_2-ből G_3-ba. A G_2 és G_3 viszont nem izomorfak, mert $Z(G_2) = 1$ ($b^x a^y \in Z(G) \Leftrightarrow$ felcserélhető a-val és b-vel is $\Leftrightarrow$ b^x felcserélhető a-val és a^y felcserélhető b-vel $\Leftrightarrow a = a^{b^x} = a^{2^x}$ és $a^y = (a^y)^b = a^{2y} \Leftrightarrow 4 \mid x$ és $5 \mid y$), és $Z(G_4) \neq 1$, mert b^2 felcserélhető b-vel és a-val is ($a^{b^2} = (a^{-1})^{-1} = a$).

6. *Mi a kanonikus alakja a $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \,/\, \langle a^2 b^{-2} \rangle$ Abel-csoportnak, ha $o(a) = o(b) = 4$? Adjuk meg G ciklikus komponenseinek a generátor elemeit valamelyik felbontásnál!*

Megoldás: $G \cong C_4 \times C_2$, ugyanis $|G| = 8$, a negyedrendű G-ben (ui. $a^2 \notin \langle a^2 b^{-2} \rangle$ az $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$-ben), és van G-ben a-tól diszjunkt másodrendű részcsoport: $\langle ab^{-1} \rangle$.

7. *Bizonyítsuk be, hogy a nemkommutatív $(C_2 \times C_2) \rtimes C_2$ csoport izomorf a $D_4 \cong C_4 \rtimes C_2$ diédercsoporttal, tehát a szemidirekt szorzatra nem teljesül a Krull–Schmidt-tétel megfelelője.*

Megoldás: D_4-et tekinthetjük az S_4 részcsoportjának (a négyzet csúcsain való hatása szerint). Ekkor a $90°$-os forgatás az (1234) permutációnak, a 24 átlóra való tükrözés az (13) permutációnak felel meg. Viszont a négyzet szimmetriáinak a csoportját generálja a két átlóra való tükrözés: (13) és (24), és egy középvonalra való tükrözés, $(12)(34)$. Az első kettő által generált részcsoport $C_2 \times C_2$-vel izomorf, tehát 2 indexű normálosztó, a harmadik pedig ettől diszjunkt másodrendű, így a generált csoport $(C_2 \times C_2) \rtimes C_2$.

8. *Bizonyítsuk be, hogy minden nyolcadrendű nemkommutatív csoport izomorf a D_4 diédercsoporttal vagy a Q kvaterniócsoporttal!*

Megoldás: Legyen G nyolcadrendű nem kommutatív csoport. Így nem lehet benne nyolcadrendű elem, mert akkor ciklikus lenne, és van benne negyedrendű, mert ha minden elem legföljebb másodrendű, akkor a csoport kommutatív. Legyen $a \in G$ negyedrendű. Ekkor $|G : \langle a \rangle| = 2$, így $\langle a \rangle$ normálosztó. Ha $\exists b \in G \setminus \langle a \rangle$ másodrendű elem, akkor $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, és ez izomorfia erejéig egyértelmű, ha a csoport nem Abel, ugyanis $\mathrm{Aut}(C_4) \cong C_2$-be egyetlen nem triviális homomorfizmus van C_2-ből.

Marad az az eset, amikor $G \setminus \langle a \rangle$ minden eleme negyedrendű. Legyen $b \in G \setminus \langle a \rangle$. Ekkor $b^2 \in \langle a \rangle$, és másodrendű, tehát $b^2 = a^2 \in Z(G)$, továbbá $\langle a \rangle \triangleleft G$ miatt $a^b = a^{\pm 1}$, de G nem kommutatív, így csak $a^b = a^{-1}$ lehet. Az $i \mapsto a$, $j \mapsto b$, $k \mapsto ab$ megfeleltetésnél a Q szorzási szabályait az eddigiekből már könnyen lehet ellenőrizni. Tehát ebben az esetben $G \cong Q$.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy a külső szemidirekt szorzat definíciójában szereplő szorzás asszociatív!*

Hf2. *Hány normálosztója van a $C_4 \times D_4$ csoportnak?*