1. *Keressünk minimális fokú tranzitív, ill. nem feltétlenül tranzitív, hűséges permutáció-reprezentációt a következő csoportokhoz!*

a) C_{10} *b)* D_6 *c)* $\langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle \cong C_5 \rtimes C_4$, *ahol* $a^b = a^2$

Megoldás: a) C_{10} hűséges reprezentációjának képét egy 10-edrendű elem generálja, tehát a kérdés az, hogy melyik S_n-ben van 10-edrendű elem, amely tranzitívan, vagy nem feltétlenül tranzitívan hat az alaphalmazon. Mivel az elem rendje a ciklusfelbontásában szereplő ciklusok hosszának legkisebb közös többszöröse, a keresett g elemben vagy van egy 10-ciklus, vagy van egy 5-tel osztható, és egy 2-vel osztható hosszúságú diszjunkt ciklus. Az első esetben $n \geq 10$, a másodikban $n \geq 5 + 2 = 7$. Tehát a minimum az $n = 7$, de ekkor a hatás nem tranzitív (egy elem orbitjai az egy-egy ciklusban szereplő elemek halmazai). Tranzitív hatású akkor lehet a permutáció, ha egyetlen ciklusból áll, tehát $n = 10$. (Egyébként az utóbbi abból is látszik, hogy minden hűséges, tranzitív hatás megkapható úgy, mint egy olyan H részcsoport mellékosztályain való jobbszorzás, amelyben nincs a G csoportnak 1-től különböző normálosztója, és ez Abel-csoport esetén csak a $H = 1$ lehet.)

b) S_4-ben nincs hatodrendű elem (ahhoz $n \geq 3 + 2 = 5$ kellene), így $n \geq 5$. S_5-ben van hatodrendű elem, pl. $a = (123)(45)$, és ehhez az $b = (13)$ olyan másodrendű (diszjunkt részcsoportot generáló) elem, amivel való konjugálás invertálja a-t, tehát D_6-tal izomorf csoportot generálnak. Ez a hatás azonban nem tranzitív ($\{1,2,3\}$ és $\{1,2\}$ az orbitjai). Nem is létezhet S_5-be menő tranzitív csoporthatása, mert S_n minden tranzitív részcsoportjának a rendje osztható n-nel. D_6 természetes módon megjelenik az S_6-ban (a szabályos hatszög csúcsain való hatással), és ez tranzitív hatás. Tehát nem tranzitívra $n = 5$, tranzitívra $n = 6$ a minimum.

c) Mivel S_n-nek kell egy ötödrendű elemének lennie, $n \geq 5$. Másrészt $H = \langle b\rangle$ nem tartalmaz normálosztót ($a^{-1}b^2a = b^2b^{-2}a^{-1}b^2a = b^2(b^{-2}ab^2)^{-1}a = b^2(a^4)^{-1}a = b^2a^2 \notin \langle b\rangle$), ezért a H mellékosztályain való hatás hűséges, tranzitív csoporthatás. Így $n = 5$ a válasz mindkét részfeladatra. (Konkrétabban, $a \mapsto (12345)$ és $b \mapsto (2354)$ hűséges, tranzitív csoporthatás.)

2. *Tekintsük az* S_5 *hatását a konjugálással az* 5*-Sylowjain! Bizonyítsuk be, hogy ez az* S_5*-nek olyan beágyazását adja* S_6*-ba, ahol* S_5 *képének harmadrendű elemei fixpontmentesek.*

Megoldás: $|Syl_5(S_5)| = 6$, mert 5-tel osztva 1 maradékot ad, osztója 24-nek, és nyilván nem 1. Így az 5-Sylowokon való hatás valóban S_6-ba képez. Harmadrendű elem nem lehet egy 5-Sylow normalizátorában, mert a normalizátor elemszáma $120 : 6 = 20$, így a harmadrendű elemek fixpontmentesen hatnak az 5-Sylowokon. Végül a hatás hűséges, mert S_5-nek csak S_5 és A_5 a nem triviális normálosztói, és ezek tartalmaznak harmadrendű elemet, tehát nem normalizálhatják az 5-Sylowokat.

3. *Legyen* $H, K \leq S_n$ *úgy, hogy* $|S_n : H| = |S_n : K| = n$*. Bizonyítsuk be, hogy van olyan* $\sigma \in \operatorname{Aut} S_n$*, amelyre* $H\sigma = K$*.*

Megoldás: A H, illetve K mellékosztályain való hatás hűséges, mert egyik részcsoport sem tartalmaz nem triviális normálosztót, így a rendek egyenlősége miatt izomorfizmus is. Címkézzük meg a H jobb mellékosztályait az $\{1, \ldots, n\}$ számokal úgy, hogy H legyen az "n", így kapunk egy $\varphi : S_n \to S_n$ izomorfizmust, amelynél a H-t a jobbszorzással helyben hagyó elemek halmazának, azaz H-nak a képe S_{n-1}, az n stabilizátora S_n-ben. Ugyanígy kapunk egy $\psi : S_n \to S_n$ izomorfizmust, ahol K képe S_{n-1}. Tehát a $\sigma := \varphi\psi^{-1} : S_n \to S_n$ izomorfizmusra $H\sigma = K$.

4. *Lássuk be, hogy* $|\operatorname{Aut} S_6| > |S_6|$.

Megoldás: A 2. feladat szerint S_6-ban van egy S_5-tel izomorf K részcsoport, amelyben a harmadrendű elemeknek nincs fixpontja. Másrészt a 6 stabilizátora (nevezzük H-nak) szintén izomorf S_5-tel, de ebben a harmadrendű elemeknek (és minden más elemnek is) van fixpontja. Minthogy az S_6 belső automorfizmusai megtartják a ciklusfelbontást, nincs olyan belső automorfizmus, ami H-t K-ba viszi, viszont a 3. feladat szerint van olyan $\sigma \in \operatorname{Aut} S_6$, amire $H\sigma = K$. Ezért $\operatorname{Aut} S_6 > \operatorname{Inn} S_6 \cong S_6/Z(S_6) = S_6$.

Az 5., 6., 7. feladat a Sylow-tételek egy permutációcsoportos bizonyításához ad útmutatást.

5. *Legyen* $|G| = p^a m$, *ahol a* p *prím nem osztója* m*-nek, és hattassuk* G*-t a jobbszorzással a* $\binom{p^a m}{p^a}$ *darab* p^a *elemű részhalmazon. Mutassuk meg, hogy ekkor minden orbit*

a) *vagy egyrétegűen fedi le* G*-t,* m *elemű, és pontosan egy részcsoport van az orbit elemei között,*
b) *vagy átfedéssel fedi le* G*-t,* p*-vel osztható elemszámú, és nincs benne részcsoport.*

Megoldás: Legyen $\mathcal{H} = \{\, S \subseteq G \mid |S| = p^a \,\}$. Mivel G hatása tranzitív az elemeken, minden $\mathcal{H}$-beli részhalmaz orbitjának az uniója a teljes G. Tehát minden orbit legalább m elemből áll, és pontosan akkor áll m elemből, ha az orbitban levő elemek (G részhalmazai) diszjunktak.

Ha egy $\mathcal{O}$ orbitban szerepel egy részcsoport is, akkor $\mathcal{O}$ elemei nyilván ennek a részcsoportnak a mellékosztályai, így $|\mathcal{O}| = m$, és az orbitnak pontosan egy eleme részcsoport. Fordítva, ha $|\mathcal{O}| = m$, és így az előzőek szerint $\mathcal{O}$ elemei diszjunktak, akkor legyen közülük S az, amelyik tartalmazza az 1-et. Belátjuk, hogy ez az S részcsoport G-ben. Ugyanis $a, b \in S$-re $b = 1 \cdot b \in S \cap Sb$, így a diszjunktság miatt $S = Sb$, tehát $ab \in Sb = S$. Továbbá $S = Sb \Rightarrow Sb^{-1} = S \Rightarrow b^{-1} = 1 \cdot b^{-1} \in S$.

Legyen most $\mathcal{O}$ egy olyan orbit, amelyre $|\mathcal{O}| > m$. Mivel egy orbit elemszáma a stabilizátor indexe, $|\mathcal{O}| \mid p^a m$, és $p^a m$-nek a p-vel nem osztható osztói m-nél nem nagyobbak, $|\mathcal{O}|$ osztható p-vel.

6. *Bizonyítsuk be, hogy* $\binom{p^a m}{p^a} \equiv m$ *(mod p) (alkalmazzuk az előző feladatot a* $p^a m$ *rendű ciklikus csoportra), és lássuk be ebből, hogy* $|Syl_p(G)| \equiv 1$ *(mod p).*

Megoldás: Mivel $|\mathcal{H}|$ az orbitok elemszámának összege, és az m-nél nagyobb orbitok elemszáma osztható p-vel, a többi pedig egy-egy (p^n rendű, vagyis Sylow-féle) részcsoportot tartalmaz,

$$\binom{p^a m}{p^a} = |\mathcal{H}| \equiv |Syl_p(G)| \cdot m \,(\text{mod p}).$$

Ez a $p^a m$ rendű ciklikus csoportra is igaz, amelyről tudjuk, hogy egyetlen p^a rendű részcsoportot tartalmaz, így $\binom{p^a m}{p^a} \equiv m \,(\text{mod p})$, így tetszőleges $p^a m$ rendű G-re

$$m \equiv |Syl_p(G)| \cdot m \,(\text{mod p})$$

és $(p, m) = 1$ miatt

$$1 \equiv |Syl_p(G)| \,(\text{mod p}).$$

Ebből rögtön következik az is, hogy $|Syl_p(G)| \neq 0$, tehát van p-Sylow-részcsoport.

7. *Tekintsük* G *hatását* $Syl_p(G)$*-n a konjugálással. Lássuk be, hogy*

a) *egy* Q p*-részcsoport akkor és csak akkor hagy helyben egy* P p*-Sylowot, ha* $Q \leq P$*;*
b) *minden* p*-részcsoport beágyazható egy* p*-Sylowba;*
c) G *tranzitívan hat* $Syl_p(G)$*-n.*

Megoldás: a) P részcsoportjai nyilván normalizálják P-t. Fordítva, ha egy $Q \leq G$ p-csoport normalizálja P-t, akkor $\langle Q, P \rangle = QP$ is p-hatvány elemszámú, és osztható $|P| = p^a$-val, így $|QP| = p^a \Rightarrow QP = P \Rightarrow Q \leq P$.

b) Q orbitjai $Syl_p(G)$-n p-hatvány elemszámúak (mert az elemszámuk $|Q|$-nak osztója), és az elemszámuk összege $= |Syl_p(G)| \equiv 1 \,(\text{mod p})$, így van 1-elemű $\{ P \}$ orbit. Az a) rész miatt $Q \leq P$.

c) Az a) rész szerint egy $Q \in Syl_p(G)$-nak a $Syl_p(G)$-n egyetlen 1-elemű orbitja van, $\{ Q \}$, és a többi orbit elemszáma p-vel osztható. Tegyük fel, hogy $P, Q \in Syl_p(G)$ nem konjugáltak G-ben. Tekintsük G orbitjait $Syl_p(G)$-n. Legyen $P \in \mathcal{O}_1$, $Q \in \mathcal{O}_2$, és $\mathcal{O}_3, \dots \mathcal{O}_r$ a többi orbit. P és Q orbitfelbontása ennek finomítása, így P orbitméreteiből $p \nmid |\mathcal{O}_1|$ és $p \mid |\mathcal{O}_2|$ következik, míg Q orbitméreteiből $p \mid |\mathcal{O}_1|$ és $p \nmid |\mathcal{O}_2|$, ami ellentmondás. Tehát minden p-Sylow-részcsoport konjugált G-ben.

8. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy csoport kommutátor-részcsoportja véges, akkor minden konjugáltosztálya is véges.*

Megoldás: $|\mathcal{K}(g)| = |\{ x^{-1}gx \,|\, x \in G \}| = |\{ g^{-1}x^{-1}gx \,|\, x \in G \}|$, mert a g^{-1}-zel való balszorzás injektív. De az utóbbi halmaz benne van G'-ben, ami véges, így $\mathcal{K}(g)$ is véges minden $g \in G$-re.

9. *Lássuk be, hogy $H, K \leq G$-re $H \leq N_G([H, K])$.*

Megoldás: Elég belátni, hogy minden $h \in H$, $k \in K$-ra és $x \in H$-ra $[h, k]^x \in [H, K]$. Valóban, $(h^{-1}k^{-1}hk)^x = x^{-1}h^{-1}k^{-1}hkx = x^{-1}h^{-1}k^{-1}hxkk^{-1}x^{-1}kx = (hx)^{-1}k^{-1}(hx)k(x^{-1}k^{-1}xk)^{-1} = [hx, k] \cdot [x, k]^{-1} \in [H, K]$.

10. *Tegyük fel, hogy a G nem kommutatív csoport minden valódi normálosztója kommutatív. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G/G' véges.*

Megoldás: A feltétel szerint G' kommutatív. Sőt, minden $G' \leq H < G$-re H kommutatív, mert a G'-t tartalmazó részcsoportok normálosztók. A $\{ H < G \,|\, G' \leq H \}$ részbenrendezett halmazra teljesül a Zorn-lemma feltétele: ezek a részcsoportok mind kommutatívak, és ilyenek felszálló láncának az uniója is kommutatív, így nem lehet az egész G. Ez azt jelenti, hogy G/G' minden valódi részcsoportja belefoglalható egy maximális részcsoportba.

Ha G/G'-nek egyetlen maximális részcsoportja van, akkor G/G' prímhatványrendű ciklikus (a maximális részcsoporton kívül levő elem generálja, és ha bármilyen más — akár végtelen rendű — ciklikus csoport lenne, abban lenne két különböző maximális részcsoport). Tehát ekkor G/G' véges.

Ha G/G' nem generálható 2 elemmel, bármely $a, b \in G$-re $\langle a, b, G' \rangle < G$, és ez normálosztó, így Abel-csoport is, ezért $ab = ba$. Ebből következik, hogy G Abel-csoport, ami ellentmond a feltételeknek.

Tehát G/G' végesen generált Abel-csoport, így előáll véges sok ciklikus csoport direkt szorzataként. Ha ezek között lenne C_∞, akkor lenne $N \triangleleft G$, amelyre $G/N \cong C_\infty$, és ennek homomorf képe $C_{30} \cong C_2 \times C_3 \times C_5$. A három komponensből kettő generátumának az ősképe G-nek valódi normálosztója, így kommutatívak, tehát a generátorelemek ősképei felcserélhetők, másrészt kigenerálják az egész G-t, tehát G Abel lenne.

Az egyetlen megmaradt eset az, amikor G/G' véges sok véges ciklikus csoport direkt szorzata, tehát véges.