1. *Bizonyítsuk be, hogy ha az $M, N \triangleleft G$ normálosztókra G/M és G/N feloldhatók, akkor $G/(M \cap N)$ is feloldható.*

Megoldás: Vegyük észre, hogy $G/(M \cap N)$ beágyazható G/M és G/N direkt szorzatába, ugyanis a $\varphi : G \to G/M \times G/N$, $\varphi : g \mapsto (Mg, Ng)$ leképezés nyilván homomorfizmus, és a magja $\{ g \in G \mid Mg = M,\ Ng = N \} = M \cap N$, így a homomorfizmustétel szerint $\operatorname{Im} \varphi \cong G/\operatorname{Ker} \varphi = G/(M \cap N)$. Feloldható csoportok direkt szorzata és részcsoportja is feloldható, így $\operatorname{Im} \varphi$, azaz $G/(M \cap N)$ is feloldható.

2. *Bizonyítsuk be, hogy minden véges csoportnak van egy legnagyobb (azaz minden más ilyet tartalmazó) feloldható normálosztója.*

Megoldás: A végesség miatt elég belátni, hogy bármely két feloldható normálosztó generátuma is feloldható normálosztó. Legyenek $M, N \triangleleft G$. Ekkor $MN \leq G$, és $MN/N \cong N/(M \cap N)$ feloldható, mert a feloldható N csoportnak faktora. Így MN feloldható csoportok bővítése, tehát maga is feloldható.

3. *Bizonyítsuk be a Burnside-tétel nélkül, hogy minden pq, p^2q és p^2q^2 rendű csoport feloldható, ha $p \neq q$ prímek.*

Megoldás: A pq rendű csoportokról már a 2. feladatsorban beláttuk, hogy a nagyobbik prímhez tartozó Sylow-csoportjuk normálosztó, tehát a csoportot két prímrendű ciklikus csoport bővítéseként kapjuk, így feloldható.

Legyen most $|G| = p^2q$. Ebben az esetben is be tudjuk bizonyítani, hogy valamelyik Sylow-csoport normálosztó, tehát G két prímhatványrendű, így feloldható csoport bővítése, ezért maga is feloldható. Ha $p > q$, akkor $|Syl_p(G)| = 1$, mert q-nak osztója, és 1 maradékot ad p-vel osztva. Ha viszont $q > p$, akkor $|Syl_q(G)| = 1$ vagy p^2. Az első esetben a q-Sylow normálosztó, a másodikban pedig felhasználhatjuk, hogy a q rendű Sylow-csoportok szükségképpen diszjunktak, így G $p^2(q-1) = p^2q - p^2$ darab q-adrendű elemet tartalmaz, tehát a maradék p^2 elembe csak egyetlen p-Sylow fér.

Végül a $|G| = p^2q^2$ esetben megint feltehetjük, hogy $p > q$. A p-Sylowok száma csak 1 vagy q^2 lehet, és az első esetben G két feloldható csoport bővítése. A másodikban $q^2 \equiv 1 \pmod{p}$, azaz $p \mid q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$, s mivel $q < p$, csak $p \mid q+1$ lehet. Viszont $p \geq q+1$, így $p = q+1$, amiből $q = 2$ és $p = 3$. Most már csak a $|G| = 36$ esetet kell megvizsgálnunk. G-ben a 3-Sylow 4-indexű, így ennek a mellékosztályain hattatva G-t, egy S_4-be menő homomorfizmust kapunk, amelynek a magja a $|G| = 36 > 24 = |S_4|$ egyenlőtlenség miatt nem triviális, de benne van a 3-Sylowban. Vagyis találtunk egy nem triviális valódi normálosztót, és ennek és a faktorának a rendje is olyan, amilyen rendű csoportok az eddigiek alapján szükségképpen feloldhatók, így G is az.

4. *Milyen 1 és 150 közötti számokra van nem feloldható n-edrendű csoport?*

Megoldás: A prímhatványrendű, az előző feladatban elintézett pq, p^2q és p^2q^2 rendű, a 2/1-es feladat szerint normális Sylowot tartalmazó, és így indukció szerint feloldható pqr rendű, és a házi feladat szerint szintén feloldható p^3q rendű csoportokon kívül a következő rendeket kell megnézni: 48, 60, 72, 80, 84, 90, 96, 108, 112, 120, 126, 132, 136, 140, 144, 150. Ebből a 60-ra és a 120-ra ismerünk nem feloldható példát: A_5 és S_5. A többi viszont mindig feloldható.

Mintának megnézünk két esetet: a 90-edrendű és 144-edrendű csoportot. Elég belátni, hogy van nem triviális, valódi normálosztójuk, mert akkor a korábban elintézett esetek alapján tudhatjuk, hogy a normálosztó és a faktor is feloldható, így maga a csoport is az.

Legyen $|G| = 90$. Az 5-Sylowok száma osztója 18-nak, és 1 maradékot ad 5-tel osztva, tehát csak 1 vagy 6 lehet. Ha 1, akkor az 5-Sylow normálosztó. Tegyük fel most, hogy

$|Syl_5(G)| = 6$, és H egy 5-Sylow normalizátora. Ekkor $|G : H| = 6 \Rightarrow |H| = 15 \Rightarrow H$ 3-Sylowja normálosztó H-ban. Legyen $C \in Syl_3(H)$, és $C \leq P \in Syl_3(G)$. P és H is normalizálja C-t, tehát $5 \cdot 9 \mid |N_G(C)|$, így $N_G(C)$ vagy 2 indexű normálosztó, vagy G-vel egyenlő, és akkor C normálosztó.

Legyen $|G| = 144 = 2^4 \cdot 3^2$. Ekkor $|Syl_3(G)| = 1$ vagy 4 vagy 16.
Ha 1, akkor a 3-Sylow normálosztó.
Ha 4, akkor a 3-Sylow normalizátorának mellékosztályain hattatva G-t, $\varphi : G \to S_4$ homomorfizmust kapunk, és ennek a magja nem triviális valódi normálosztó.
Ha 16, és a 3-Sylowok mind diszjunktak, akkor $16 \cdot 8$ elemet lefednek, és a maradék 16 elemen csak egy 2-Sylow lehet $\Rightarrow$ a 2-Sylow normálosztó.
Végül ha $|Syl_3(G)| = 16$, és van két különböző 3-Sylow, P_1 és P_2, amelyek nem diszjunktak: $P_1 \cap P_2 = C \cong C_3$, akkor $|P_i| = 9$ miatt P_i Abel, tehát $P_1, P_2 \leq N_G(C) =: H$. De $|Syl_3(H)| = 4$ vagy $16 \Rightarrow 36 \mid |H|$.
Ha $|G : H| = 4$, akkor $\varphi : G \to S_4$ homomorfizmus, mint fent.
Ha $|G : H| = 2$, akkor $H \lhd G$.
Ha $G = H$, akkor $C \lhd G$.

5. *Legföljebb milyen hosszú lehet egy* 48 *elemű csoport kommutátorlánca?*

Megoldás: $|G| = 48 = 2^4 \cdot 3$. A 2-Sylow mellékosztályain való (S_3-ba menő) csoporthatás K magja 3 vagy 6 indexű lehet, azaz $|K| = 16$ vagy 8. G/K feloldhatósági hossza legföljebb 2, és K feloldhatósági hossza is maximum 2, mert egy 2-hatványrendű csoportban van 4 indexű normálosztó, és annak a faktora Abel, és maga a normálosztó is az a K-ban, minthogy 2 vagy 4 a rendje. Így G feloldhatósági hossza legföljebb 4. Speciálisan legyen $G = Q \rtimes S_3$, ahol a $\varphi : S_3 \to \operatorname{Aut} Q \cong S_4$ leképezés injektív, és a harmadrendű $a \in S_3$ elem körbepermutálja i-t, j-t és k-t. Ekkor $[a, i] = -k$, és $[a, j] = -i$, tehát $[Q, \langle a \rangle] \geq Q$. Így $G' \geq Q$ és $G' \geq S_3' = \langle a \rangle$. Mivel $|G : \langle Q, a \rangle| = 2$, $\langle Q, a \rangle$ Abel faktorú normálosztó, így $G' = \langle Q, a \rangle$. $[Q, a] \geq Q$ miatt G'' csak Q lehet, és tudjuk, hogy $Q' = Z(Q)$. Tehát a kommutátorlánc $1 \lhd Z(Q) \lhd Q \lhd Q\,\langle a \rangle \lhd G$ 4 hosszú, és láttuk, hogy ennél hosszabb más 48-adrendű csoportban sem lehet.

Hall-tételek:
Ha G véges, feloldható csoport, és $\pi \subseteq \mathcal{P}$, akkor
1) G minden π-részcsoportja benne van egy π-Hall-részcsoportban;
2) G bármely két π-Hall-részcsoportja konjugált egymással.

6. *Bizonyítsuk be, hogy egy $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ rendű csoportban a Hall-rendszerek ($\{ R_1, \ldots, R_r \}$, ahol $R_i \in Hall_{p_i'}(G)$ $\forall i$), és a Sylow-bázisok ($\{ P_1, \ldots, P_r \}$, ahol $P_i \in Syl_{p_i}(G)$ $\forall i$ és $P_i P_j = P_j P_i$ $\forall i, j$) között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van.*

Megoldás: Az előadáson láttuk, hogy egy $\{ R_1, \ldots, R_r \}$ Hall-rendszerre $P_i = \cap_{j \neq i} R_j$ $(i = 1, \ldots, r)$ Sylow-bázist ad, az pedig nyilvánvaló, hogy egy $\{ P_1, \ldots, P_r \}$ Sylow-bázisra $R_i = \langle P_j \,|\, j \neq i \rangle$ $(i = 1 \ldots r)$ Hall-rendszer. Azt kell még belátni, hogy ha φ a Hall-rendszerekhez Sylow-bázisokat rendelő leképezés, ψ pedig az, amelyik Sylow-bázisokhoz Hall-rendszereket rendel, akkor $\varphi\psi = id$ és $\psi\varphi = id$.

Ha P_i-k az R_i-khez rendelt Sylow-bázis elemei, akkor $R_i \geq P_j$ minden $i \neq j$-re, így $\langle P_j \,|\, j \neq i \rangle \leq R_i$, és mindkettő p_i'-Hall-részcsoport, így egyenlők. Fordítva, ha R_i-k a P_j-khez rendelt Hall-rendszer elemei, akkor $R_j \geq P_i$ minden $j \neq i$-re, így $\cap_{j \neq i} R_j \geq P_i$, és mindkettő p_i-Sylow, így egyenlők.

7. *Bizonyítsuk be, hogy egy véges feloldható csoportban bármely két Hall-rendszer és bármely két Sylow-bázis konjugált egymással.*

Megoldás: A 6. feladat miatt elég belátni, hogy a Hall-rendszerek konjugáltak egymással, mert akkor az ezek metszeteként kapott Sylow-bázisok is konjugáltak lesznek, és bármely két Sylow-bázist megkapunk alkalmas Hall-rendszerek metszeteiből. Legyen $\{ R_1, \dots, R_r \}$ és $\{ T_1, \dots, T_r \}$ két Hall-rendszer, és $\{ P_1, \dots, P_r \}$ az elsőhöz tartozó Sylow-bázis. Ekkor a Hall-tételek szerint van olyan $g \in G$, amelyre $R_1^g = T_1$. A 6. feladat ψ leképezése szerint $G = P_1 P_2 \cdots P_r = P_1 R_1 = R_1 P_1$, tehát $g = xy$, ahol $x \in R_1$ és $y \in P_1$. Így $T_1 = R_1^g = R_1^{xy} = R_1^y$. Másrészt $P_1 \leq R_i$ minden $i > 1$-re, tehát $R_i^y = R_i$ minden $i > 1$-re. Ezért az y-nal való konjugálás az $\{ R_1, R_2, \dots, R_r \}$ Hall-rendszert a $\{ T_1, R_2, \dots, R_r \}$ Hall-rendszerbe viszi. Ezt folytatva, egymást utáni konjugálással lecserélhetjük az eredeti Hall-rendszer összes elemét.

8. *Bizonyítsuk be, hogy ha $\{ P_1, \dots, P_r \}$ Sylow-bázis G-ben, és $N \lhd G$, akkor*
1) $\{ P_1 \cap N, \dots, P_r \cap N \}$ Sylow-bázis N-ben, és
2) $\{ P_1 N/N, \dots, P_r N/N \}$ Sylow-bázis G/N-ben.

Megoldás: Bizonyítottuk, hogy π-Hall-részcsoportnak normálosztóval vett metszete, illetve faktorizálásnál vett képe is π-Hall-részcsoport, így ez a Sylow-részcsoportokra is igaz. Ezen kívül csak azt kell belátni, hogy a kapott Sylow-részcsoportok felcserélhetők egymással.

a) Legyen $i \neq j$. $(P_i \cap N)(P_j \cap N) \subseteq \langle (P_i \cap N), (P_j \cap N) \rangle \leq \langle P_i, P_j \rangle \in Hall_{\{ p_i, p_j \}}(G)$, és $|(P_i \cap N)(P_j \cap N)| = |P_i \cap N| \cdot |P_j \cap N|$ maximális $\{ p_i, p_j \}$-osztója $|N|$-nek, így $(P_i \cap N)(P_j \cap N) = \langle (P_i \cap N), (P_j \cap N) \rangle$, vagyis $P_i \cap N$ és $P_j \cap N$ felcserélhetők.

b) $P_i N P_j N = P_i P_j N = P_j P_i N = P_j N P_i N$, így $(P_i N/N)(P_j N/N) = (P_j N/N)(P_i N/N)$.

Hf1. *Bizonyítsuk be (a Burnside-tétel nélkül), hogy minden $p^3 q$ rendű csoport feloldható, ha $p \neq q$ prímek.*

Hf2. *Határozzuk meg a $G = D_4 \rtimes D_4$ csoport kommutátorláncát, ha a szemidirekt szorzat konstrukciójában szereplő $\varphi : D_4 \to \operatorname{Aut} D_4$ izomorfizmus.*