1. *Bizonyítsuk be, hogy $n \leq 6$-ra S_n-nek minden nilpotens részcsoportja kommutatív vagy p-csoport. Keressük meg (konjugáltság erejéig) S_7-ben az összes nem kommutatív nilpotens részcsoportot!*

Megoldás: Legyen $G = S_n$ $(n \leq 7)$, és $K \leq G$ nilpotens, nem kommutatív csoport. K a Sylowjainak direkt szorzata, így akkor lesz nem Abel, ha az egyik Sylowja nem Abel, és $|K| \mid 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ miatt ez csak a 2-Sylow lehet. Legyen $P \in Syl_2(K)$. A 0./6. feladat szerint P-nek van 2-nél nagyobb rendű, így 4-edrendű eleme is; legyen $g \in P$ negyedrendű. Minden más Sylow benne van $C_G(P)$-ben, így $C_G(g)$-ben is.

Ha $n = 6$, akkor $|C_G(g)| = 8$ mindkét fajta ciklusfelbontású negyedrendű g elemre, ezért nincs S_6-ban (és akkor persze a kisebb fokú szimmetrikus csoportokban sem) nilpotens, nem kommutatív csoport, ami nem p-csoport.

S_7-ben a nem kommutatív p-csoportokat is meg kell határoznunk, ezért kezdjük a keresett K csoport 2-Sylowjának leírásával. Mivel P benne van $G = S_7$ valamelyik 2-Sylowjában, feltehetjük, hogy $P \leq \langle (1234), (12)(34) \rangle \times \langle (56) \rangle \cong D_4 \times C_2$ (ha nincs benne, akkor átkonjugálhatjuk abba a Sylowba). P vagy a teljes 16-odrendű csoport, vagy ennek egy 8-adrendű részcsoportja. Ha egy $H_1/N_1 \to H_2/N_2$ izomorfizmus grafikonjaként keressük, akkor itt $H_1 = D_4$, mert különben $P \leq H_1 \times H_2$ Abel-csoport lenne. Mivel $|P| = |H_1| \cdot |N_2|$, csak $N_2 = 1$ lehetséges, és P vagy egy $D_4/D_4 \to 1/1$ izomorfizmus grafikonja, azaz $D_4 \times 1$, vagy egy $D_4/N_1 \to C_2/1$ alakú izomorfizmusé, és itt N_1 háromféle lehet. Tehát S_7 nem kommutatív 2-csoportjai (izomorfizmus erejéig):

$$\begin{aligned}
P_1 &= \langle (1234), (12)(34), (56) \rangle \cong D_4 \times C_2 \\
P_2 &= \langle (1234), (12)(34) \rangle \cong D_4 \\
P_3 &= \langle (1234), (12)(34)(56) \rangle \cong D_4 \\
P_4 &= \langle (1234)(56), (12)(34) \rangle \cong D_4 \\
P_5 &= \langle (1234)(56), (13) \rangle \cong D_4
\end{aligned}$$

Ezek valóban nem konjugáltak egymással:
P_1 nem is izomorf a többivel, a P_2, P_3, P_4, P_5 csoportokat pedig megkülönbözteti egymástól az, hogy melyik tartalmaz 4-ciklust, illetve 2-ciklust.

Végül a P_i-k $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ közül egyedül $C_G(P_2)$ nem 2-csoport, és ebből még megkapjuk a $K = P_2 \times \langle (567) \rangle \cong D_4 \times C_3$ nilpotens csoportot is.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha M maximális részcsoportja egy G véges feloldható csoportnak, akkor $|G : M|$ prímhatvány.*

Megoldás: A G rendjére vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. Ha G p-csoport, akkor nyilván igaz. Mivel G feloldható, van egy $1 \neq N \lhd G$ normálosztója, ami p-csoport. Ha $N \leq M$, akkor M/N maximális részcsoportja G/N-nek, így az indukciós feltevés miatt $|G : M| = |G/N : M/N|$ prímhatvány. Ha $N \not\leq M$, akkor M maximalitása miatt $MN = G$, és így $|G : M| = |MN : M| = |N : (M \cap N)| \mid |N|$, ami prímhatvány.

3. *Bizonyítsuk be, hogy egy nilpotens csoportban minden nem triviális normálosztó metszi a centrumot!*

Megoldás: Legyen $G = K_1 > K_2 > \cdots > K_{k+1} = 1$ a G ferde kommutátorlánca, és $1 \neq N \lhd G$. Legyen i a legkisebb index, amire $N \cap K_i = 1$. Ekkor $M = N \cap K_{i-1}$-re $1 \neq M \leq N$, továbbá $[M, G] \leq [K_{i-1}, G] = K_i$, és $[M, G] \leq [N, G] = N$, mivel N normálosztó, tehát $[M, G] \leq N \cap K_i = 1$, vagyis $M \leq Z(G)$, így $1 \neq M \leq N \cap Z(G)$.

4. *Legyen $x, y \in G$. Bizonyítsuk be, hogy*
a) $[x, y] = [y, x]^{-1}$;
b) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$ *és* $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$;
c) $[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1$, *ahol* $[x, y, z] := [[x, y], z]$.

Megoldás: a) $[y, x]^{-1} = (y^{-1}x^{-1}yx)^{-1} = x^{-1}y^{-1}xy = [x, y]$

b) $[xy, z] = (y^{-1}x^{-1})z^{-1}(xy)z = y^{-1}(x^{-1}z^{-1}x)yz = y^{-1}(x^{-1}z^{-1}xz)z^{-1}yz = y^{-1}[x, z]y(y^{-1}z^{-1}yz) = [x, z]^y[y, z]$.
A másik hasonlóan bizonyítható, vagy az elsőből is kijön, ha alkalmazzuk rá az a) részt: $[x, yz] = [yz, x]^{-1} = ([y, x]^z[z, x])^{-1} = [z, x]^{-1}([y, x]^z)^{-1} = [x, z][x, y]^z$.

c)
$$[x, y^{-1}, z]^y = y^{-1}[y^{-1}, x]z^{-1}[x, y^{-1}]zy = x^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}yxy^{-1}zy$$
$$[y, z^{-1}, x]^z = z^{-1}[z^{-1}, y]x^{-1}[y, z^{-1}]xz = y^{-1}z^{-1}yx^{-1}y^{-1}zyz^{-1}xz$$
$$[z, x^{-1}, y]^x = x^{-1}[x^{-1}, z]y^{-1}[z, x^{-1}]yx = z^{-1}x^{-1}zy^{-1}z^{-1}xzx^{-1}yx$$

Mindegyiknek az utolsó öt tagját kiejti a következő, így a szorzat:

$$[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = (x^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1})(xzx^{-1}yx) = 1.$$

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B, C \lhd G$, akkor*
a) $[A, B] \lhd G$;
b) $[A, B] = [B, A]$;
c) $[AB, C] = [A, C][B, C]$;
d) $[A, B, C] \le [B, C, A][C, A, B]$.

Megoldás: a) $[A, B]$ generátorelemeit $[A, B]$ generátorelemeibe viszi a konjugálás:

$$[a, b]^g = g^{-1}(a^{-1}b^{-1}ab)g = (a^g)^{-1}(b^g)^{-1}a^gb^g = [a^g, b^g].$$

b) $[b, a] = [a, b]^{-1} \in AB$, így $[B, A] \le [A, B]$, és ugyanígy $[A, B] \le [B, A]$. (Mellesleg ez akkor is igaz, ha A és B csak részcsoportok.)

c) $[A, C], [B, C] \le [AB, C]$, mert $A, B \le AB$, és így $[A, C][B, C] \le [AB, C]$. Másrészt $[AB, C]$ tetszőleges generátoreleme $[ab, c] = [a, c]^b[b, c] \in [A, C][B, C]$ (ld. 4.b)), mert $[A, C] \lhd G$.

d) Jelölje egy a elem tetszőleges konjugáltját a^*. Vegyük észre, hogy $[a, b]^{-1} = [b, a] = b^{-1}a^{-1}ba = b^{-1}(a^{-1}bab^{-1})b = [a, b^{-1}]^* = [a^*, (b^{-1})^*]$, így $[A, B]$ minden eleme $[a, b]$ alakú elemek szorzata. Indukcióval bizonyíthatjuk 4.b)-ből, hogy $[x_1x_2 \cdots x_n, y] = [x_1, y]^*[x_2, y]^* \cdots [x_n, y]^*$, tehát $[A, B, C] = [[A, B], C]$ generátorelemei megkaphatók $[a, b, c]^*$ alakú elemek szorzataiként, és ezek 4.c) szerint $([b, c, a]^*[c, a, b]^*)^{-1}$ alakban írhatók, az utóbbiak pedig benne vannak a $[B, C, A][C, A, B]$ normálosztóban.

6. *Legyen G nilpotens csoport, amelynek fölső centrállánca $1 = Z_0 < Z_1 < \cdots < Z_k = G$, és ferde kommutátorlánca $G = K_1 > K_2 > \cdots > K_{k+1} = 1$. Bizonyítsuk be, hogy*
a) $[Z_j, K_i] \le Z_{j-i}$, *ha* $j \ge i$;
b) $[K_i, K_{k-i+1}] = 1$, *minden i-re.*

Megoldás: a) Tudjuk, hogy $[Z_i, G] \le Z_{i-1}$ és $[K_i, G] = K_{i+1}$ minden i-re. A $[Z_j, K_i] \le Z_{j-i}$ állítást i-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. $i = 1$-re $[Z_j, K_1] = [Z_j, G] \le Z_{j-1}$. Tegyük fel, hogy $i \ge 2$, és $i-1$-re igaz az állítás. Ekkor

$$[Z_j, K_i] = [Z_j, [K_{i-1}, G]] = [[K_{i-1}, G], Z_j]$$

az 5.b) szerint, és az utóbbira alkalmazhatjuk az 5.d) állítást:

$$[[K_{i-1}, G], Z_j] \leq [[G, Z_j], K_{i-1}][[Z_j, K_{i-1}], G] \leq [Z_{j-1}, K_{i-1}][Z_{j-i+1}, G]$$

(az első tagra a felső centrállánc tulajdonságait, a második tagra az indukciós feltevést használtuk). Még egy ugyanilyen lépéssel azt kapjuk, hogy

$$[Z_j, K_i] \leq Z_{j-i}Z_{j-i} = Z_{j-i}.$$

b) Mivel minden centrállánc a felső centrállánc alatt halad, a két számozást összeigazítva azt kapjuk, hogy $K_i \leq Z_{k-i+1}$, ezért az a) rész miatt

$$[K_i, K_{k-i+1}] \leq [Z_{k-i+1}, K_{k-i+1}] \leq Z_0 = 1.$$

7. *Legyen M c nilpotenciaosztályú, N pedig d nilpotenciaosztályú normálosztó G-ben. Bizonyítsuk be, hogy MN is nilpotens normálosztó, amelynek nilpotenciaosztálya legföljebb $c + d$.*

Megoldás: Az 5.b) összefüggésből következik, hogy $K_i(MN) = [MN, MN, \ldots, MN]$ (i-szeres kommutátor) felírható olyan i-szeres kommutátorok szorzataként, amelyekben minden tag vagy M, vagy N. Így $K_{c+d+1}(MN)$-et olyan $c + d + 1$-szeres kommutátorok generálják, amelyekben van vagy legalább $c + 1$ darab M, vagy legalább $d + 1$ darab N. Ha $A \lhd G$, akkor $B \leq G$-re $[A, B] \leq [A, G] \leq A$, tehát az első esetben elhagyhatjuk az N-eket, a másodikban az M-eket, és az így kapott csoportok generátuma tartalmazza $K_{c+d+1}(MN)$-t. De $cl(M) = c$ és $cl(N) = d$ miatt ezen csoportok mindegyike 1, tehát $K_{c+d+1}(MN) = 1$.

8. *Bizonyítsuk be, hogy egy G véges csoportban létezik legnagyobb nilpotens normálosztó (azaz olyan, amelyik minden más nilpotens normálosztót tartalmaz). Ez a Fitting-részcsoport, $F(G)$.*

Megoldás: Mivel a csoport véges, csak véges sok nilpotens normálosztója van, és a 7. feladat szerint ezek szorzata is nilpotens normálosztó, amely eszerint tartalmazza az összes nilpotens normálosztót.

9. *Bizonyítsuk be, hogy egy véges feloldható csoportnak minden nem triviális normálosztója metszi a Fitting-részcsoportot!*

Megoldás: Legyen G véges feloldható csoport, és $1 \neq N \lhd G$. Mivel G feloldható, N is az. Legyen M az N kommutátorláncának utolsó $\neq 1$ tagja. Ekkor M char $N \lhd G$ miatt $M \lhd G$, és mivel M Abel, az is nilpotens normálosztó. Így $1 \neq M \leq F(G) \cap N$.

Hf1. *Legyen $N, K \lhd G$, ahol K nilpotens, és N minimális normálosztó a G-ben. Bizonyítsuk be, hogy $N \leq C_G(K)$.*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy ha $G' \leq Z(G)$, akkor bármely $x, y \in G$-re és n pozitív egész számra $(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{2}}$.*