1. *Bizonyítsuk be, hogy ha p a $|G|$ legkisebb prímosztója, és a G p-Sylowja ciklikus, akkor G-ben van normál p-komplementum!*

Megoldás: A Burnside-féle p-komplementumtételt szeretnénk alkalmazni. Ehhez azt kell bebizonyítanunk, hogy egy $P \in Syl_p(G)$ p-Sylow-részcsoportra $N_G(P) = C_G(P)$.

Mivel az $N_G(P)$ elemeivel való konjugálás automorfizmusként ha a P csoporton, és a hatás magja $C_G(P)$, a $H = N_G(P)/C_G(P)$ csoport beágyazható $\operatorname{Aut} P$-be. Ha $P \cong C_{p^n}$, akkor $|\operatorname{Aut} P| = p^{n-1}(p-1)$, viszont $|H| \mid |G : C_G(P)| \mid |G : P|$, ugyanis a P kommutatív csoport benne van a centralizátorában. Tehát $|H|$ osztója $p^{n-1}(p-1)$ és $|G : P|$ legnagyobb közös osztójának, ami 1, ugyanis p nem osztja $|G : P|$-t, mert P p-Sylow, és $p-1$ prímosztói sem oszthatják, mert p a $|G|$ legkisebb prímosztója.

Tehát $N_G(P)/C_G(P) = 1$, azaz $N_G(P) = C_G(P)$, így G-ben van normál p-komplementum.

Egy G csoport metaciklikus, ha G' és G/G' ciklikus.

2. *Lássuk be, hogy minden véges, nilpotens, metaciklikus csoport ciklikus!*

Megoldás: Ha G nilpotens, akkor $G' \le \Phi(G)$, így $G/\Phi(G) \cong (G/G')/(\Phi(G)/G')$ faktorcsoportja a G/G' ciklikus csoportnak, tehát maga is ciklikus. Ezért van olyan $g \in G$, amelyre $\{ a \} \cup \Phi(G)$ generátorrendszere G-nek. Viszont $\Phi(G)$ elemei egyenként elhagyhatók a generátorrendszerből, ezért $G = \langle a \rangle$, azaz G ciklikus.

3. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy G véges csoport minden Sylow-részcsoportja ciklikus, akkor G metaciklikus!*

Megoldás: Az a tulajdonság, hogy a Sylow-részcsoportok ciklikusak, öröklődik a részcsoportokra és faktorcsoportokra (részcsoport Sylow-részcsoportja beágyazható a G Sylowjába, és a G Sylow-részcsoportjának a képe a faktorizálásnál a faktorcsoport Sylowja). Az 1. feladatból következik, hogy G-ben van normál p-komplementum a legkisebb prímosztóhoz, így indukcióval bizonyítható, hogy G feloldható. A kommutátorláncának a faktoraira is igaz, hogy a Sylowjai ciklikusak, de mivel ezek Abel-csoportok, a Sylowjaiknak direkt szorzatai, ezért a kommutátorlánc faktorai ciklikusak. Végül használhatjuk az előadásról azt a lemmát, hogy nem lehet G'/G'' és G''/G''' mindegyike nem triviális ciklikus csoport, ezért $G'' = 1$, és G metaciklikus.

4. *Tegyük fel, hogy a véges G csoport minden Sylowja ciklikus, és $M \triangleleft N \triangleleft G$. Bizonyítsuk be, hogy $M \triangleleft G$.*

Megoldás: $|M|+|N|+|G|$-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. $M = 1$-re nyilván igaz, tehát feltehető, hogy $M > 1$.

Vegyük észre, hogy az 1. feladatból indukcióval az is következik, hogy G legnagyobb prímhez tartozó Sylowja normálosztó: legyen H a legkisebb prímhez tartozó normál komplementum. Ez kisebb rendű, és szintén ciklikusak a Sylowjai, tehát a legnagyobb prímhez tartozó P Sylowjára $P \triangleleft H$, amiből $P \operatorname{char} H \triangleleft G$ miatt $P \triangleleft G$.

A feladat M részcsoportjában is normálosztó a legnagyobb p prímhez tartozó $P \in Syl_p(M)$ Sylow-részcsoport. Erre $P \operatorname{char} M \triangleleft N$, tehát $P \triangleleft N$ az N-nek normális p-csoportja.

Ezért P benne van N összes Sylow-részcsoportjában, így azok metszetében, $O_p(N)$-ben is. Mivel $O_p(N) \operatorname{char} N \triangleleft G$, azt kapjuk, hogy $P \triangleleft O_p(N) \triangleleft G$. Ha $O_p(N) = N$, akkor N p-csoportja G-nek, ezért ciklikus, és így $M \operatorname{char} N \triangleleft G \Rightarrow M \triangleleft G$. Ha $O_p(N) < N$, akkor az indukciós feltevés miatt $P \triangleleft G$, és akkor az $M/P \triangleleft N/P \triangleleft G/P$ sorozatra alkalmazhatjuk az indukciós feltevést: $M/P \triangleleft G/P$, így $M \triangleleft G$.

5. *Legyen $G \ge H \ge K$, és $|G : K| < \infty$. Mutassuk meg, hogy $T^*_{G \to H} \cdot T^*_{H \to K} = T^*_{G \to K}$, ahol $T^*_{G \to H} : G/G' \to H/H'$ a $T_{G \to H} : G \to H/H'$ által indukált homomorfizmust jelöli.*

Megoldás: Legyen $H = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} Kx_i$ és $G = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} Hy_j$. Ekkor $G = \dot{\bigcup}_{i,j} Kx_iy_j$. Ha

$$y_j g = h_j y_{j\beta}, \text{ és } x_i h_j = k_{ij} x_{i\alpha_j},$$

akkor

$$x_i y_j g = x_i h_j y_{j\beta} = k_{ij} x_{i\alpha_j} y_{j\beta},$$

tehát

$$(gG')T^*_{G\to K} = \prod_{i,j} k_{ij}K' = \prod_j \prod_i k_{ij}K' = \prod_j (h_jH')T^*_{H\to K} =$$
$$= \left(\Big(\prod_j h_j \Big) H' \right) T^*_{H\to K} = (gG')T^*_{G\to H}T^*_{H\to K}.$$

6. *Lássuk be, hogy $|\Omega| \geq k$-ra $G \leq S_\Omega$ akkor és csak akkor k-tranzitív, ha G tranzitív, és G_α $(k-1)$-tranzitív az $\Omega \setminus \{\alpha\}$-n valamely/bármely $\alpha \in \Omega$-ra!*

Megoldás: Tegyük fel, hogy G k-tranzitív. Ekkor nyilván tranzitív is (az előírt $\alpha \mapsto \beta$ megfeleltetést kiegészíthetjük tetszőlegesen két k-as közötti megfeleltetéssé), és G_α $(k-1)$-tranzitív tetszőleges α-ra, mert egy $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ k-ast át lehet vinni egy $(\alpha, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ k-asba, ha $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ és $\{\beta_2, \ldots, \beta_k\}$ $(k-1)$-elemű részhalmazok $\Omega \setminus \{\alpha\}$-ban.

Most tegyük fel, hogy G tranzitív, és G_α $(k-1)$-tranzitív valamely α-ra, továbbá legyenek $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ és $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ k-elemű részhalmazok Ω-ban. A tranzitivitás miatt van olyan $g, h \in G$, hogy $g : \alpha_1 \mapsto \alpha$ és $h : \alpha \mapsto \beta_1$, továbbá G_α $(k-1)$-tranzitivitása miatt van olyan $x \in G_\alpha$, amelyre $\alpha_i gx = \beta_i h^{-1}$ $\forall i \in \{2, \ldots, k\}$. Így $\alpha_1(gxh) = \alpha xh = \alpha h = \beta_1$, és $\alpha_i(gxh) = (\alpha_i g)xh = (\beta_i h^{-1})h = \beta_i$ $\forall i \in \{2, \ldots, k\}$.

7. *Milyen n és q esetén lehet a $V = \mathbb{F}_q^n$ vektortér $AGL(V)$ affin csoportja k-tranzitív valamely $k > 2$-re?*

Megoldás: Legyen $G = AGL(V) = \{x \mapsto Ax + b \mid A \in GL(V),\ b \in V\}$, ahol $\dim_K V = n$. G tranzitív, mert tetszőleges $a, b \in V$-re $a \mapsto aI + (b-a) = b$. A 0 vektor stabilizátora $G_0 = GL(V)$. G_0 tranzitív $V \setminus \{0\}$-n, ugyanis tetszőleges $a, b \neq 0$ vektorokat ki lehet egészíteni egy-egy bázissá, és van olyan invertálható transzformáció, ami az egyik bázist a másikba viszi. Így G mindig 2-tranzitív.

G_0 nem lehet 2-tranzitív, ha $n > 1$ és $|K| > 2$, mert akkor $u, v \in V$ független vektorokra, és $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$ skalárra az $(u, \lambda u)$ összefüggő párt nem tudjuk az (u, v) független párba képezni lineáris transzformációval.

Ha $n = 1$ és $|K| > 3$, akkor sem lehet G_0 2-tranzitív, mert akkor van $\lambda \neq \mu \in K \setminus \{0, 1\}$, és egy $0 \neq v \in V$ vektorra a $(v, \lambda v)$ párt nem képezhetjük a $(v, \mu v)$ párba.

Ha $n = 1$ és $|K| = 3$, akkor $|V| = |K| = 3$, és G 3-tranzitív, mert $GL(V)$ 2-tranzitív ($(1, -1) \xmapsto{\cdot 1} (1, -1)$ és $(1, -1) \xmapsto{\cdot(-1)} (-1, 1)$).

Ha $|K| = 2$, és $n \geq 2$, akkor G_0 2-tranzitív, mert minden $u \neq v$ nem nulla vektor független is, és egy (u_1, u_2) független vektorpárt át lehet vinni egy tetszőleges (v_1, v_2) független vektorpárba úgy, hogy mindegyiket tetszőlegesen kiegészítjük bázissá. Tehát ilyenkor G 3-tranzitív. Viszont ha $n > 2$, akkor G_0 3-tranzitív már nem lehet, mert $u, v, w \in V$ független vektorokra az $(u, v, u+v)$ összefüggő vektorhármast nem képezhetjük az (u, v, w) független vektorhármasba.

Végül ha $|K| = 2$ és $n = 2$, akkor $|V| = 4$, és ezen G 4-tranzitívan hat, mert tetszőleges, 3 különböző nemnulla vektorból álló (u_1, u_2, u_3) és (v_1, v_2, v_3) vektorhármasra $u_3 = u_1 + u_2$ és $v_3 = v_1 + v_2$, tehát az $A : u_1 \mapsto v_1,\ u_2 \mapsto v_2$ invertálható transzformációra $A : u_3 \mapsto v_3$.

Összefoglalva: G 4-tranzitív, ha $n = 2$ és $|K| = 2$,
3-tranzitív (de nem 4-tranzitív), ha $n = 1$ és $|K| = 3$ vagy $n \geq 3$ és $|K| = 2$,
és minden más esetben csak 2-tranzitív.