1. *Határozzuk meg ekvivalencia erejéig az összes olyan tranzitív permutációcsoportot, amely izomorf S_4-gyel!*

Megoldás: S_4 hűséges tranzitív csoportreprezentációi megkaphatók az olyan részcsoportok mellékosztályain való hatásokként, amelyek nem tartalmaznak normálosztót. Konjugált részcsoportok nyilván ekvivalens csoporthatást adnak, tehát elég a részcsoportok konjugáltosztályaiból egyet-egyet megnézni. Legyen $H \leq S_4$.
$H = 1$: a Cayley-reprezentáció, 24 elemen.
$H = \langle(12)\rangle$ vagy $H = \langle(12)(34)\rangle$: 12-edfokúak. Nem ekvivalensek, mert a másodikban a V Klein-csoportnak van 2-elemű orbitja, az elsőben V mindegyik orbitja 4-elemű. A kocka (S_4-gyel izomorf) mozgáscsoportja hűségesen hat a 12 élen, és az előbbi szerint ez az $\langle(12)\rangle$-n való hatással lehet csak ekvivalens, ugyanis abban a három szimmetriatengely körüli 180°-os forgatások adják V másodrendű elemeit, és azok a párhuzamos éleken tranzitívan hatnak.
$H = \langle(123)\rangle$: 8-adfokú (ekvivalens a kocka mozgáscsoportjának hatásával a 8 csúcson)
$H = \langle(1234)\rangle$ vagy $H = \langle(12),(34)\rangle$: 6-odfokúak, és nem ekvivalensek, mert az elsőben a negyedrendű elemeknek van fixpontjuk (elég egyet megnézni közülük, hiszen mind konjugáltak), a másodikban nincs. A kocka mozgáscsoportjának a 6 lapon való hatása az elsővel ekvivalens (itt a negyedrendű elemek a szimmetriatengelyek körüli 90°-os forgatások). (Az S_4 2-Sylowjában csak három negyedrendű részcsoport van, de a harmadik a Klein-csoport, ami normálosztó S_4-ben, ezért nincs több hűséges, tranzitív, 6-odfokú csoporthatás.)
$H = S_3$: 4-edfokú, az S_4 természetes hatása.
Minden ennél nagyobb rendű részcsoport tartalmazza a Klein-csoportot, így nem ad hűséges csoporthatást.

2. *Tegyük fel, hogy $G \leq S_\Omega$ primitív, és $|G|$ nem prím. Bizonyítsuk be, hogy minden $\alpha, \beta \in \Omega$-ra $\alpha \neq \beta$ esetén $\langle G_\alpha, G_\beta\rangle = G$.*

Megoldás: G primitív $\Rightarrow$ a stabilizátorok maximális részcsoportok $\Rightarrow$ $\forall \alpha \neq \beta$-ra vagy $G_\alpha = G_\beta$, vagy $\langle G_\alpha, G_\beta\rangle = G$. Legyen $\alpha \sim \beta$, ha $G_\alpha = G_\beta$. A $\sim$ ekvivalencia reláció megadja az Ω-nak egy partícióját, amely G-invariáns, mert $\alpha \sim \beta \Rightarrow G_\alpha = G_\beta \Rightarrow \forall g \in G$-re $G_{\alpha g} = (G_\alpha)^g = (G_\beta)^g = G_{\beta g} \Rightarrow \alpha g \sim \beta g$. Tehát ha van olyan $\alpha \neq \beta$, amelyre $G_\alpha = G_\beta$, akkor G primitivitása miatt a $\sim$-hoz tartozó partíció csak egyetlen osztályból állhat, azaz minden stabilizátor megegyezik. De a stabilizátorok metszete 1, tehát ebben az esetben a stabilizátorok triviálisak. Viszont a primitivitás miatt maximális részcsoportok is, amiből az következne, hogy $|G|$ prím, ellentmondva a feltevésnek.
Tehát bármely $\alpha \neq \beta$-ra $G_\alpha \neq G_\beta$, és így $\langle G_\alpha, G_\beta\rangle = G$.

3. *Bizonyítsuk be, hogy ha a G véges csoportnak van olyan másodrendű automorfizmusa, amely fixpontmentes $G \setminus \{1\}$-en, akkor G Abel-csoport.*

Megoldás: a) Ha az invertálás automorfizmus, akkor $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \Rightarrow xy = (x^{-1}y^{-1})^{-1} = yx\ \forall x, y$.
b) Tekintsük a $\psi : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}(x\sigma)$ leképezést. Ez szürjektív, ugyanis $x^{-1}(x\sigma) = y^{-1}(y\sigma) \Rightarrow xy^{-1} = (x\sigma)(y\sigma)^{-1} = (xy^{-1})\sigma$, és σ fixpontmentes $G \setminus \{1\}$-en $\Rightarrow xy^{-1} = 1$ $\Rightarrow x = y$.
Mivel G véges, ψ szürjektív is, tehát G minden eleme előáll $x^{-1}(x\sigma)$ alakban. Viszont $(x^{-1}(x\sigma))\sigma = (x\sigma)^{-1}(x\sigma^2) = (x\sigma)^{-1}x = (x^{-1}(x\sigma))^{-1}$, tehát σ az egész csoporton invertálással hat, így G Abel-csoport.
Ha G-nek lenne másodfokú eleme, az fixpontja lenne σ-nak, tehát G páratlan rendű.

Egy $G \leq S_n$ permutációcsoport $\frac{1}{2}$-tranzitív, ha minden orbitja ugyanakkora.
G $k+\frac{1}{2}$-tranzitív, ha G k-tranzitív, és $G_{1,2,\ldots,k}$ $\frac{1}{2}$-tranzitív a többi elemen.

4. *Tegyük fel, hogy $G \leq S_n$ 2-tranzitív. Bizonyítsuk be, hogy G-nek minden nem triviális normálosztója $\frac{3}{2}$-tranzitív.*

Megoldás: Legyen $1 \neq N \triangleleft G$, és $\alpha \in \Omega$. Ekkor $\forall \beta, \gamma \in \Omega \setminus \{\alpha\}$-ra $\exists g \in G$: $g : \alpha \mapsto \alpha$ és $g : \beta \mapsto \gamma$. Mivel $g \in G_\alpha$, és $N_\alpha = G_\alpha \cap N \triangleleft G_\alpha$,

$$|\gamma N_\alpha| = |\beta g N_\alpha| = |\beta N_\alpha g| = |\beta N_\alpha|,$$

tehát N_α minden $\Omega \setminus \{\alpha\}$-beli orbitja azonos méretű.

5. *Legyen $G \leq S_n$ primitív, és tegyük fel, hogy G-nek nincs reguláris normálosztója, továbbá, hogy G_α egyszerű. Bizonyítsuk be, hogy G is egyszerű!*

Megoldás: Legyen $1 \neq N \triangleleft G$. Mivel G primitív, N tranzitív.
$N \cap G_\alpha \triangleleft G_\alpha$, és G_α egyszerű $\Rightarrow$ $N \cap G_\alpha = 1$ vagy G_α.

Az első esetben $N \cap G_{\alpha g} = N \cap (G_\alpha)^g = N^g \cap (G_\alpha)^g = (N \cap G_\alpha)^g = 1$ minden g-re, tehát G tranzitivitása miatt N reguláris, ami a feltevés miatt nem lehet.

A másodikban $G_\alpha \leq N$, de G_α maximális G-ben, és G_α nem tranzitív, így $G = N$.

6. *Legyen $N \triangleleft G$ reguláris normálosztó a $G \leq S_n$ permutációcsoportban. Bizonyítsuk be, hogy a $H = G_\alpha$ stabilizátorral $G = N \rtimes H$, és H hatása a konjugálással az N-en ekvivalens a H természetes hatásával az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazon!*

Megoldás: Az N regularitása miatt van egy bijekció $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ és N között:
Legyen $\underline{\beta} \in N$ az az elem, amelyre $\alpha\underline{\beta} = \beta$.
Így $\underline{\alpha}$ az N egységeleme, és tetszőleges $g \in G_1$ hatása N-en:

$$\alpha(g^{-1}\underline{\beta}g) = \alpha\underline{\beta}g = \beta g, \text{ tehát } g^{-1}\underline{\beta}g = \underline{\beta g},$$

vagyis a konjugálás hatása megadott bijekció szerint megfelel a G_α hatásának az Ω halmazon.

7. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy 4-tranzitív $G \leq S_n$ csoportnak van reguláris normálosztója, akkor $n = 4$, és $G = S_4$.*

Megoldás: Ha G 4-tranzitív, akkor G_α 3-tranzitív az $\Omega \setminus \{\alpha\}$-n, tehát a 6. feladat szerint egy reguláris $N \triangleleft G$ normálosztóra a G_α-nak a hatása N-en a konjugálással ekvivalens a G_α hatásával az $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ alaphalmazon, következésképpen G_α, és így az N automorfizmuscsoportja is 3-tranzitív $N \setminus \{1\}$-en. Minthogy az automorfizmusok tartják a rendet, N minden 1-től különböző eleme azonos rendű, és így p rendű, valamilyen p prímre. Ebből következik, hogy N p-csoport, így feloldható is, és mivel karakterisztikusan egyszerű (az $\operatorname{Aut} N$ $N \setminus \{1\}$-en való tranzitivitása miatt), $N' = 1$, azaz N elemi Abel-p-csoport. Ez egy multiplikatív vektortér $\mathbb{F}_p$ fölött, tehát felhasználhatjuk a 6. feladatsor 7. feladatának eredményét, amely szerint $GL(V)$ csak akkor lehet 3-tranzitív $V \setminus \{0\}$-n ($AGL(V)$ pedig 4-tranzitív V-n), ha V 2-dimenziós vektortér egy 2-elemű test fölött. Tehát $|N| = 4$, s mivel N reguláris, $n = 4$. S_4-nek pedig maga S_4 az egyetlen 4-tranzitív részcsoportja.

8. *Az 5. és 7. feladat eredményét felhasználva adjunk új bizonyítást arra, hogy A_n egyszerű, ha $n > 4$.*

Megoldás: Először belátjuk, hogy A_5 egyszerű. Legyen $1 \neq N \lhd A_5$. Mivel A_5 3-tranzitív, primitív is, így N tranzitív, és ezért $5 \mid |N|$. De akkor N tartalmazza A_5 összes 5-Sylow-részcsoportját, amelyből 6 darab van (24 ötödrendű elemből), így $30 \mid |N|$. Ebből következik, hogy N tartalmazza A_5-nek valamelyik, és így az összes 3-Sylowját. A 3-ciklusok pedig kigenerálják az egész A_5-öt, tehát $N = A_5$.

Most legyen $n > 5$, és tegyük fel, hogy A_{n-1} (ami egyúttal az n stabilizátora A_n-ben) egyszerű. A 7. feladat szerint A_n-nek nincs reguláris normálosztója, így az 5. feladatból következik, hogy A_n egyszerű.

9. *Hány eleme van a $GL_n(q)$, $SL_n(q)$ és $PSL_n(q)$ csoportoknak?*

Megoldás: $GL_n(q)$ elemei az invertálható $n \times n$-es mátrixok a q elemű $\mathbb{F}_q$ test fölött. Egy ilyen mátrix első sora bármilyen $\neq 0$ vektor lehet $\mathbb{F}_q^n$-ből, tehát $(q^n - 1)$-féle vektor közül választhatunk. A második sor bármi lehet, ami nem skalárszorosa az első sornak: $(q^n - q)$-féle. És ha már kiválasztottunk i független vektort az első i sorba, akkor az $(i+1)$-edik sor $\mathbb{F}_q^n$ bármely olyan vektora lehet, ami nem áll elő az első i darab független vektor lineáris kombinációjaként, azaz $(q^n - q^i)$-féle. Tehát

$$|GL_n(q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i).$$

A $\det : GL_n(q) \to \mathbb{F}_q^\times$ homomorfizmus szürjektív (tetszőleges $a \in \mathbb{F}_q^\times$ elemre az $a, 1, 1, \ldots, 1$ átlójú diagonális mátrix determinánsa a), és magja $SL_n(q)$, így

$$|SL_n(q)| = |GL_n(q)|/(q-1).$$

Végül $Z(SL_n(q))$ elemei az 1 determinánsú skalármátrixok, εI, ahol ε megoldása az $x^n = 1$ egyenletnek. Mivel $\mathbb{F}_q^\times$ $(q-1)$-elemű ciklikus csoport, az egyenletnek pontosan $(n, q-1)$ megoldása van. Tehát

$$|PSL_n(q)| = |SL_n(q)|/(n, q-1).$$

10. *Mi az $SL_2(3)$ 2-Sylowja? Bizonyítsuk be, hogy $SL_2(3) \ncong S_4$.*

Megoldás: $|SL_2(3)| = (3^2 - 1)(3^2 - 3)/2 = 24$, tehát a 2-sylowja 8-adrendű. Az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ negyedrendű mátrix belefoglalható egy 2-Sylowba, tehát olyan 2-hatványrendű elemet kell keresnünk, amely normalizálja az A mátrixot. Az $AX = XA$ lineáris egyenletrendszernek csak az $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ mátrixok a megoldásai, amelyek közül csak az A hatványai az 1 determinánsúak $\mathbb{F}_3$ fölött. Az $AX = XA^{-1}$ egyenletrendszer megoldásai $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ alakúak, és például $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ determinánsa 1. Mivel $B^2 = -I = A^2$, B is negyedrendű, és $\langle A, B \rangle \cong Q$. Viszont S_4 2-Sylowja D_4-gyel izomorf, így $SL_2(3) \ncong S_4$.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy egy véges reguláris csoport akkor és csak akkor primitív, ha prím rendű.*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy $SL_2(5)$ 2-Sylowja izomorf a kvaterniócsoporttal!*