1. *Bizonyítsuk be a következő izomorfiákat:*

$$PSL_2(2) \cong S_3 \qquad PSL_2(3) \cong A_4 \qquad PSL_2(4) \cong A_5$$

(Felhasználhatjuk, hogy $PSL_n(q)$ egyszerű, ha $n > 2$ vagy $n = 2$ és $q > 3$.)

Megoldás: $PSL_2(2) = GL_2(2)$, mert $GL_2(2)$ minden elemének a determinánsa 1, és I az egyetlen skalármátrix. $|GL_2(2)| = (2^2 - 1)(2^2 - 2) = 6$, és a csoport nyilván nem kommutatív (pl. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ nem felcserélhetők), így csak S_3-mal lehet izomorf.

$|PSL_2(3)| = (3^2-1)(3^2-3)/(2\cdot 2) = 12$, és hűségesen hat az $\mathbb{F}_3^2$ egydimenziós alterein, így beágyazható az S_4-be. S_4-nek viszont A_4 az egyetlen 12-edrendű részcsoportja ($\Rightarrow$ normálosztója), tehát $PSL_2(3) \cong A_4$.

Végül $|PSL_2(4)| = (4^2 - 1)(4^2 - 4)/3 = 60$, és hűségesen hat az $\mathbb{F}_4^2$ öt 1-dimenziós alterén, tehát $PSL_2(4)$ beágyazható S_5-be, s mivel 60 elemű, a képe csak az A_5 lehet.

De beláthatjuk azt is, hogy A_5 az egyetlen 60-elemű egyszerű csoport. Tegyük fel, hogy G egyszerű, és $|G| = 60$. Legyen $P \in Syl_2(G)$. Ekkor $|G : N_G(P)| = 1, 3, 5$ vagy 15. Ha 1, akkor $P \triangleleft G$ lenne, ha 3, akkor lenne G-nek S_3-ban menő nem triviális homomorfizmusa, ha pedig 15, akkor $N_G(P) = P = C_G(P)$ miatt a Burnside-féle normál p-komplementumtételből következne, hogy G nem egyszerű. Tehát $|G : N_G(P)| = 5$, és így van egy $\varphi : G \to S_5$ homomorfizmus, ami G egyszerűsége miatt hűséges, azaz G beágyazható S_5-be. A rendekből következik, hogy $G \cong A_5$.

2. *Bizonyítsuk be, hogy $PSL_3(4)$-nek nincs 15-ödrendű eleme, így $|PSL_3(4)| = |A_8|$, de $PSL_3(4) \not\cong A_8$.*

Megoldás: A rendek valóban megegyeznek:

$$|PSL_3(4)| = \frac{(4^3 - 1)(4^3 - 4)(4^3 - 4^2)}{(4 - 1) \cdot (3, 4 - 1)} = 7 \cdot 60 \cdot 48 = \frac{8!}{2} = |A_8|.$$

Ha $PSL_3(4) = SL_3(4)/Z(SL_3(4))$-nek van 15-ödrendű eleme, akkor $SL_3(4)$-nek van olyan eleme, amelynek csak a 15-ödik hatványa skalármátrix. Legyen ez a mátrix M. Mivel $|Z(SL_3(4))| = 3$, M rendje 15 vagy 45. Ha M minimálpolinomja $m(x)$, akkor $m(x) \mid x^{45} - 1$, ami szeparábilis (azaz minden gyöke különböző a felbontási testében), ugyanis a deriváltja, $45x^{44} = x^{44}$ relatív prím $(x^{45} - 1)$-hez. Ezért M diagonalizálható a bővítési test fölött, $m(x)$ pedig a D diagonális alakjában szereplő egységgyökök minimálpolinomjainak legkisebb közös többszöröse.

Az $x^{45} - 1$ polinomnak a felbontási test minden olyan eleme gyöke, amelyiknek a rendje osztója 45-nek, és d-edrendűből $\varphi(d)$ darab van (véges test multiplikatív csoportja ciklikus!), azok n foka pedig annak a legkisebb testbővítésnek a foka $\mathbb{F}_4$ fölött, amelyiknek a multiplikatív csoportja tartalmaz d-edrendű elemet, azaz amelyikre $d \mid |K^\times| = |K| - 1 = 4^n - 1$. Tehát $x^{45} - 1$ gyökei

rend$=d$	darab $= \varphi(d)$	testbővítés $= \mathbb{F}_{4^n}$	fok $= n$
1	1	$\mathbb{F}_4$	1
3	2	$\mathbb{F}_4$	1
5	4	$\mathbb{F}_{16}$	2
9	6	$\mathbb{F}_{64}$	3
15	8	$\mathbb{F}_{16}$	2
45	24	$\mathbb{F}_{4096}$	6

így $\quad x^{45}-1=(x^5-1)(x^5-a)(x^5-a^2)(x^3-a)(x^3-a^2)p_1(x)p_2(x)p_3(x)p_4(x)$, ahol $\mathbb{F}_4=\{1,a,a^2,0\}$. Az első három faktor $1+2+2$ fokú irreducibilis polinomokra bomlik $\mathbb{F}_4$ fölött, a többi irreducibilis, és a $p_i(x)$ polinomok foka 6. Mivel $\deg m(x)\le 3$ (ugyanis osztója a harmadfokú karakterisztikus polinomnak), a p_i-kkel nem lehet közös gyöke, és ha valamelyik harmadfokú faktorral megegyezne, akkor M^3 már skalármátrix lenne (M^3 minimálpolinomja $(x-a)$ vagy $(x-a^2)$ volna). Ha D diagonális elemei közül több is lenne az első három ötödfokú faktor valamelyikéből, és nem három ugyanabból, akkor M^5 determinánsa nem lenne 1. Ha ugyanabból lenne a három sajátérték, akkor M^5 skalármátrix lenne, végül ha a három sajátérték az első három faktor mindegyikéből van, akkor azok csak az elsőfokú $x-1$, $x-a$ és $x-a^2$ polinomok gyökei lehetnek, tehát $M^3=1$ volna.

Végül A_8-nak nyilván van 15-ödrendű eleme, pl. (12345)(678).

3. *Bizonyítsuk be, hogy $F(x,y)$-ban $\langle x, y^{-1}xy, y^{-2}xy^2, y^{-3}xy^3,\dots\rangle$ végtelen rangú szabad csoport.*

Megoldás: Legyen $a_i=y^{-i}xy^i$. Belátjuk, hogy a_i-k szabad generátorok $H=\langle a_0,a_1,\dots\rangle$-ban. Tegyük fel, hogy a $w=a_{i_1}^{n_1}\cdots a_{i_r}^{n_r}$ nem üres redukált szó az a_i-kre nézve, azaz $r>0$, $n_j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, és $i_j\ne i_{j+1}$ minden j-re. Ekkor $w=y^{-i_1}x^{n_1}y^{i_1}y^{-i_2}x^{n_2}y^{i_2}\cdots y^{-i_r}x^{n_r}y^{i_r}=y^{-i_1}x^{n_1}y^{i_1-i_2}x^{n_2}y^{i_2-i_3}\cdots y^{i_{r-1}-i_r}x^{n_r}y^{i_r}$, és az utóbbi redukált az x,y-ra nézve, mert esetleg az első és az utolsó kivételével, a kitevők nem 0-k. Ennek a szónak a hossza legalább r, így $w\ne 1$.

4. *Bizonyítsuk be, hogy ha $F(X)=\langle G\rangle$ valamely G részhalmazra, akkor $|G|\ge|X|$.*

Megoldás: Ha $A=F(X)/F(X)'$, és $P=A/A^2$, akkor P egy multiplikatív vektortér, amelynek $\{\,\overline{x}\mid x\in X\,\}$ bázisa, viszont $\{\,\overline{g}\mid g\in G\,\}$ is generátorrendszere, így $|G|\ge|X|$.

5. *a) Bizonyítsuk be, hogy $\langle x,y\mid x^2=y^2=1,\ xyxy=yxyx\rangle\cong D_4$.*
b) Hány elemű a $\langle x,y,z\mid x^2=y^2=z^3=1,\ xy=yx,\ z^{-1}xz=y,\ z^{-1}yz=xy\rangle$ csoport?
c) Lássuk be, hogy $\langle x,y\mid x^2=y^2=1\rangle$ minden véges nem kommutatív homomorf képe izomorf valamelyik diéder csoporttal.

Megoldás: a) Legyen K a relációkkal definiált csoport. D_4-ben $x=t$ és $y=tf$ (ahol t az egyik tengelyes tükrözés, f pedig a 90°-os forgatás) kielégítik a relációkat, ezért az $x\mapsto t$, $y\mapsto tf$ leképezésből kiterjesztett $\varphi: F(x,y)\to D_4$ homomorfizmus indukál egy $\overline{\varphi}: K\to D_4$ homomorfizmust, amely ráadásul szürjektív is, mivel $D_4=\langle t,tf\rangle$. Azt kell még belátnunk, hogy $|K|\le 8$, és akkor $\overline{\varphi}$ szükségképpen injektív, ezért izomorfizmus is lesz.

Tekintsük a $H=\langle x\rangle\le K$ részcsoportot, és alkalmazzuk a Todd–Coxeter-algoritmust a H mellékosztályainak megszámolására. Maga H az 1-gyel jelölt mellékosztály a táblázatban. Az x és y hatása szerint kitöltve a táblázatot (közben felhasználva, hogy a generáló relációk által megadott szavak helyben hagyják a mellékosztályokat), és az üres helyekre új mellékosztályneveket választva (2, 3, ...), a következő táblázatokat és összefüggéseket kapjuk sorra. (A szám vastag, ahol először írjuk be.)

	x	x	y	y	x	y	x	y	x^{-1}	y^{-1}	x^{-1}	y^{-1}
1	1	1		1	1							1

$1x=1$

	x	x	y	y	x	y	x	y	x^{-1}	y^{-1}	x^{-1}	y^{-1}
1	1	1	**2**	1	1	2					2	1
2		2	1	2					2	1	1	2

$1y = 2$
$2y = 1$

	x	x	y	y	x	y	x	y	x^{-1}	y^{-1}	x^{-1}	y^{-1}
1	1	1	**2**	1	1	2	3			3	2	1
2	**3**	2	1	2	3			3	2	1	1	2
3	2	3		3	2	1	1	2	3			3

$2x = 3$
$3x = 2$

	x	x	y	y	x	y	x	y	x^{-1}	y^{-1}	x^{-1}	y^{-1}
1	1	1	**2**	1	1	2	3	4	4	3	2	1
2	**3**	2	1	2	3	4	4	3	2	1	1	2
3	2	3	**4**	3	2	1	1	2	3	4	4	3
4	4	4	3	4	4	3	2	1	1	2	3	4

$3y = 4$
$4y = 3$
$4x = 4$

Mivel az eddig megszámozott mellékosztályokat x és y is egymás között permutálja, K viszont tranzitív a H mellékosztályain, H-nak nincs 4-nél több mellékosztálya (egybeesések elvileg lehetnének a megszámozott mellékosztályok között). Ebből következik, hogy $|K| = |K : H| \cdot |H| \leq 4 \cdot 2 = 8$, tehát $\overline{\varphi}$ valóban izomorfizmus.

b) Legyen K a relációkkal megadott csoport. Ebben a $H = \langle x, y \rangle$ részcsoport legfeljebb 4-elemű, mert x és y felcserélhető és legfeljebb másodrendű, tehát H minden eleme $x^a y^b$ alakban írható, ahol $a, b \in \{0, 1\}$. A $z^{-1}xz = y$, $z^{-1}yz = xy$ relációkból következik, hogy $H \lhd K$, s mivel $z^3 = 1$, $|K| = |\langle K, z \rangle| = |H \langle z \rangle| \leq 4 \cdot 3 = 12$. Másrészt az A_4 12-edrendű csoport kielégíti a relációkat az $x = (12)(34)$, $y = (23)(14)$, $z = (123)$ behelyettesítéssel, tehát A_4 homomorf képe K-nak, így K pontosan 12 elemű, sőt azt is megkaptuk, hogy $K \cong A_4$.

c) Ha $x^2 = y^2 = 1$, akkor $x^{-1}(xy)x = yx = y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1}$. Legyen G véges, $\varphi : K = \langle x, y \,|\, x^2 = y^2 = 1 \rangle \to G$ szürjektív homomorfizmus, és $g := x\varphi$, $h := (xy)\varphi$. Ekkor $G = \langle g, h \rangle$, mert $K = \langle x, xy \rangle$. Mivel G nem kommutatív, $g \neq 1$, és így $x^2 = 1$ miatt $o(g) = 2$. Legyen $o(h) = n$. G-ben teljesül, hogy $g^{-1}hg = (x^{-1}(xy)x)\varphi = ((xy)^{-1})\varphi = h^{-1}$, tehát $\langle h \rangle$ C_n-nel izomorf normálosztó, és $G = \langle h \rangle \rtimes \langle g \rangle \cong C_n \rtimes C_2$, ahol g hatása az invertálás, így $G \cong D_n$.

6. *Adjuk meg S_4-et definiáló relációkkal úgy, hogy a generátorelemek transzpozícióknak feleljenek meg! Adjuk meg A_5-öt hasonlóképpen 3-ciklusokkal generálva!*

Megoldás: S_4 helyett általánosabban S_n prezentációját adjuk meg.

S_n-et generálják az (12), (23), $\ldots$, $(n-1, n)$ ciklusok, mert $(12)^{(23)(34)\cdots(i-1,i)} = (1i)$ benne van a generátumban, és így $(1j)^{(1i)} = (ij)$ is, ahol $1, i, j$ különbözők. Az összes transzpozíció viszont generálja S_n-et. Mivel $(i, i+1)(i+1, i+2) = (i, i+2, i+1)$ harmadrendű, és $i + 1 < j$-re $(i, i+1)(j, j+1)$ másodrendű, az $a_i = (i, i+1)$ elemek kielégítik a

$$K_n = \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \,|\, x_i^2 = 1 \ \forall i,\ (x_i x_{i+1})^3 = 1 \ \forall i \leq n-1,\ (x_i x_j)^2 = 1, \quad \text{ha } |i - j| \geq 2 \rangle$$

csoport relációit. Ezért $K \cong S_n$, ha belátjuk, hogy $|K| \leq n!$.

n-re vonatkozó indukcióval bebizonyítjuk, hogy K_n elemei felírhatók $w_{n-1} \cdots w_2 w_1$ alakban, ahol vagy $w_i = 1$, vagy $w_i = x_j x_{j+1} \cdots x_i$ valamely $j \le i$-re. Ilyen szóból nyilván $n \cdot (n-1) \cdot 2 \cdot 1 = n!$ van (elvileg K_n-ben egyenlők is lehetnek köztük), tehát ebből megkapjuk, hogy $|K_n| \le n!$.

Mivel $x_i^2 = 1$ minden i-re, K_n elemei x_i-k szorzataként írhatók. A másik két fajta reláció azt adja, hogy a nem szomszédos generátorelemek felcserélhetők egymással, míg $x_{i+1} x_i x_{i+1} = x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} x_{i+1}^{-1} = x_i x_{i+1} x_i$. Vegyünk egy olyan felírást, amely minimális számú x_{n-1}-et tartalmaz. Ha ebben lenne két x_{n-1} is, akkor $g = \ldots x_{n-1} u x_{n-1} \ldots$, ahol u-ban az indukciós feltevés miatt elérhető, hogy legföljebb egy x_{n-2} legyen (ugyanis K_n relációi tartalmazzák K_{n-1} relációit). Az $(x_i x_j)^2 = 1$, azaz $x_i x_j = x_j x_i$ feltételek miatt $x_{n-1} u x_{n-1} = x_{n-1}^2 u = u$, ha u-ban nincs x_{n-2}, és $x_{n-1} u x_{n-1} = u' x_{n-1} x_{n-2} x_{n-1} u'' = u' x_{n-2} x_{n-1} x_{n-2} u''$, ha u-ban egyetlen x_{n-2} van. Tehát mindkét esetben csökkenteni tudnánk az x_{n-1}-ek számát. Így a minimumfeltevés miatt g-ben legföljebb egy x_{n-1} van, és ha egyáltalán van benne x_{n-1}, akkor g-t az ind. felt. szerint $(w_{n-2} w_{n-3} \ldots w_1) x_{n-1} u = (w_{n-2} x_{n-1}) w_{n-3} \ldots w_1 u$ alakra hozható, ahol az x_{n-1} utáni részt megint átlakíthatjuk $w'_{n-2} \ldots w'_1$ alakúvá.

Az A_5 esetében vegyük észre, hogy $A_5 = \langle (123), (234), (345) \rangle$, mert $(123)(234) = (13)(24)$ másodrendű, így $\langle (123), (234) \rangle \le A_4$ rendje osztható 6-tal, s mivel A_4-nek nincs 6-odrendű részcsoportja, 12-vel is, másrészt $(123)(345) = (12453)$ ötödrendű, tehát $|\langle (123), (234), (345) \rangle|$ 12-vel és 5-tel is osztható, így csak a teljes A_5 lehet.

Ha $a = (123)$, $b = (234)$ és $c = (345)$, akkor ab és bc másodrendűek, és $ac^{-1}b$ is az. Tehát a, b, c kielégíti a

$$K = \langle x, y, z \,|\, x^3 = y^3 = z^3 = 1,\ (xy)^2 = 1,\ (yz)^2 = 1,\ (xz^{-1}y)^2 = 1 \rangle$$

relációit. K-nak az x és y által generált H részcsoportja homomorf képe a $K_1 = \langle x, y \,|\, x^3 = y^3 = 1,\ (xy)^2 = 1 \rangle$ relációkkal generált csoportnak, és abban $\langle x \rangle$ indexét megbecsülhetjük a Todd–Coxeter-algoritmussal, ezután pedig a $|K : H|$indexet.

	x	x	x	y	y	y	x	y	x	y
1	1	1	1	**2**	3	1	1	2	**3**	1
2	3	**4**	2	3	1	2	3	1	1	2
3	4	2	3	1	2	3	4	4	2	3
4	2	3	4	4	4	4	2	3	4	4

$1x = 1 \quad 2y = 3$
$1y = 2 \quad 3x = 4$
$2x = 3 \quad 4x = 2$
$3y = 1 \quad 4y = 4$

	x	x	x	y	y	y	z	z	z	x	y	x	y	y	z	y	z	x	z^{-1}	y	x	z^{-1}	y
1	1	1	1	1	1	1	2	**3**	1	1	1	1	1	1	2	3	1	1	3	**4**	**2**	1	1
2	**5**	4	2	3	4	2	3	1	2	5	5	4	2	3	1	1	2	5	5	5	4	4	2
3	3	3	3	4	2	3	1	2	3	3	4	2	3	4	4	2	3	3	2	3	3	2	3
4	2	5	4	2	3	4	4	4	4	2	3	3	4	2	3	4	4	2	1	1	1	3	4
5	4	2	5	5	5	5	5	5	5	4	2	5	5	5	5	5	5	4	4	2	5	5	5

$1x=1$	$1z=2$	$2z=3$	$3y=4$	$2x=5$
$1y=1$		$3z=1$	$4x=2$	$5x=4$
		$2y=3$	$4y=2$	$5y=5$
			$3x=3$	$5z=5$
			$4z=4$	

Tehát $|K| = |K:H| \cdot |H| \le 5\cdot 4\cdot 3 = 60$, így $K \cong A_5$.

7. *Bizonyítsuk be, hogy*
a) $\langle x, y \mid y^{-1}xy = x^2,\ x^{-1}yx = y^2\rangle = 1$;
*b)** $\langle x, y, z \mid y^{-1}xy = x^2,\ z^{-1}yz = y^2,\ x^{-1}zx = z^2\rangle = 1$.

Megoldás: a) $y^{-2}xy^2 = y^{-1}x^2y = x^4$, másrészt $y^{-2}xy^2 = (x^{-1}y^{-1}x)x(x^{-1}yx) = x^{-1}y^{-1}xyx = x^{-1}x^2x = x^2$. Tehát $x^4 = x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = yx^2y^{-1} = 1 \Rightarrow y^2 = x^{-1}yx = y \Rightarrow y = 1$.

8. *Adjuk meg definiáló relációkkal a következő csoportokat:*
a) $C_2 \times C_2 \times C_4$ *b)* $C_3 \times C_8$ *c)* Q

Megoldás: a) $K = \langle x, y, z \mid x^2, y^2, z^4, [x,y], [x,z], [y,z]\rangle$ nyilván Abel-csoport, mert x, y, z páronként felcserélhetők. Így $|K| \le |\langle x\rangle| \cdot |\langle y\rangle| \cdot |\langle z\rangle| \le 2\cdot 2\cdot 4 = 16$, és $C_2\times C_2\times C_4$-ben a ciklikus komponensek generátorai kielégítik a K relációit.
b) $C_3 \times C_8 \cong C_{24}$, így egy generátorral is meg lehet adni a csoportot: $C_3 \cong \langle x \mid x^{24}\rangle$.
c) $K = \langle x, y \mid x^4 = 1,\ x^2 = y^2,\ y^{-1}xy = x^{-1}\rangle$-ben normálosztó az $\langle x\rangle$, és $K/\langle x\rangle = \langle \overline{y}\rangle$ legföljebb másodrendű, mert $y^2 \in \langle x\rangle$, tehát $|K| = |\langle x\rangle| \cdot |K : \langle x\rangle| \le 4\cdot 2 = 8$. Másrészt Q-nak az i, j generátorai kielégítik a K relációit, így Q homomorf képe K-nak, és a rendek egyenlősége miatt ez a homomorfizmus izomorfizmus.

9. *Adjunk meg*
a) 3 *rangú szabad részcsoportot* $F(x,y)$*-ban;*
b) 4 *rangú szabad részcsoportot* $F(x,y,z)$*-ben!*
Van-e ilyen véges indexű részcsoport?

Megoldás: A 3. feladat szerint $F(x,y)$, és így $F(x,y,z)$ is tartalmaz végtelen rangú szabad csoportot, és ennek tetszőleges két, illetve három szabad generátoreleme 3-ad, illetve 4-edrangú szabad csoportot generál: $F_3 \cong \langle x, y^{-1}xy, y^{-2}xy^2\rangle \le F(x,y)$, és $F_4 \cong \langle x, y^{-1}xy, y^{-2}xy^2, y^{-3}xy^3\rangle \le F(x,y,z)$.

Ha $|F:H| = k$ véges, és F n rangú szabad csoport, akkor $\mathrm{rang}(H) = kn-k+1$. $n=3$ esetén a $3k-k+1 = 2k+1 = 4$ egyenletnek nincs egész megoldása, tehát $F(x,y,z)$-ben nincs véges indexű 4 rangú szabad részcsoport. $n=2$ esetén viszont a $2k-k+1 = k+1 = 3$ egyenletből $k=2$, vagyis $F(x,y)$ minden 2 indexű részcsoportja 3-adrangú szabad csoport.

Konkrétan az $\langle x, y \mid x = 1,\ y^2 = 1\rangle \cong C_2$ izomorfiából következik, hogy az $\{\,x, y^2\,\}$ által generált N normálosztó 2 indexű, és ezt részcsoportként az $\{\,x, y^{-1}xy, y^2\,\}$ halmaz generálja. Valóban, a $H = \langle x, y^{-1}xy, y^2\rangle$ részcsoport benne van N-ben ($x \in N \Rightarrow y^{-1}xy \in N$), maga is normálosztó ($x$ nyilván normalizálja,és $x^y = y^{-1}xy \in H$, $(y^{-1}xy)^y = y^{-2}xy^2 \in H$, és $(y^2)^y = y^2 \in H$ miatt y is), és tartalmazza az N-nek mint normálosztónak a generátorelemeit, tehát $N \le H$ is igaz. Végül azt is beláthatjuk, hogy H-ban $g_1 = x$, $g_2 = y^{-1}xy$, $g_3 = y^2$ szabad generátorrendszer, ugyanis ha felírunk belőle egy redukált szót, abban az x-ek és x^{-1}-ek száma nem csökkenthető ($g_1^m g_2^n = x^m y^{-1}x^n y$ redukált, ha $m, n \ne 0$), és ha a szó g_3^n alakú ($n \ne 0$), akkor nyilván redukált.