1. *Legyen $G = HK$, ahol $H, K \leq G$, és $[H, K] = 1$. Lássuk be, hogy $H' \lhd G$.*

Megoldás: Legyen $x \in H'$, és $g = hk \in G$ ($h \in H$, $k \in K$). Ekkor $x^h \in H'$, mert $H' \lhd H$, és $x^{hk} = (x^h)^k = x^h$, mert $[x^h, k] \in [H, K] = 1$. Így $(H')^g \leq H'$ $\forall g \in G \Rightarrow H' \lhd G$.

2. *Hány 8-elemű részcsoport van a $G = Q \times C_4$ csoportban?*

Megoldás: *I. megoldás:* C_4 szeletei $C_4/1$, $C_4/C_2 \cong C_2/1 \cong C_2$ és $C_4/C_4 \cong C_2/C_2 \cong 1/1 \cong 1$. Ha a K részcsoport egy $H_1/N_1 \to H_2/N_2$ izomorfizmus grafikonja, akkor $|K| = |N_1| \cdot |N_2| \cdot |H_2/N_2| = |N_1| \cdot |H_2|$, tehát $K = 8$ esetén $|N_1| = 8/|H_2|$. A C_4 szeletei szerint csoportosítva a 8-elemű részcsoportok:
$H_1/N_1 \to C_4$ nincs, mert $|N_1| = 2 \Rightarrow H_1 = Q$ és $N_1 = Z(Q)$, de $Q/Z(Q) \cong C_2 \times C_2 \not\cong C_4$.
$H_1/N_1 \to C_4/C_2$ esetén $|N_1| = 2 \Rightarrow N = Z(Q)$ és $|H_1| = 4 \Rightarrow 3$ csoport.
$H_1/N_1 \to C_2/1$ esetén $|N_1| = 4$, és $H_1 = Q \Rightarrow 3$ csoport.
$H_1/N_1 \to 1$ esetén $H_1 = N_1$, és a rendek szerint párosítva $1 + 3 + 1 = 5$ csoport.
Ez összesen 11 részcsoport.

II.megoldás: Ha $|K| = 8$, akkor $K \cap Q \neq 1$, mert különben $|KQ| = 64 > G$ lenne. De Q minden 1-nél nagyobb részcsoportja tartalmazza a kételemű $Z(Q)$ részcsoportot, így elég a $Z(Q)$-t tartalmazó 8-elemű részcsoportokat, illetve ehelyett a $G/Z(Q) \cong C_2 \times C_2 \times C_4$ Abel-csoport 4-elemű részcsoportjait megszámolni. A C_4-gyel izomorfak száma: $(4 \cdot 2)/2 = 4$ (a negyedrendű elemek száma, osztva az egy C_4-ben levő negyedrendű elemek számával), a $C_2 \times C_2$-vel izomorfak száma pedig $(7 \cdot 6)/(3 \cdot 2) = 7$ (a két különbözöző másodrendű elemből álló párok száma osztva az ugyanilyen párok számával egy $C_2 \times C_2$ részcsoportban), tehát összesen $4 + 7 = 11$ 8-adrendű részcsoport van.

3. *Bizonyítsuk be, hogy ha $G = A \rtimes (B \rtimes C)$, akkor $G = (A \rtimes B) \rtimes C$ (belső szemidirekt szorzat).*

Megoldás: $G = A \rtimes (B \rtimes C) = A(B \rtimes C) = A(BC) = (AB)C$, ahol $AB \leq G$, mert $A \lhd G$. $A \cap B \leq A \cap (BC) = 1$, tehát $AB = A \rtimes B$. C normalizálja AB-t, ugyanis $A \lhd G$ miatt normalizálja A-t, és $B \lhd BC$ miatt normalizálja B-t is. De akkor $G = (AB)C$ is normalizálja AB-t, azaz $AB \lhd G$. Végül $AB \cap C = 1$, ugyanis ha $ab = c \in AB \cap C$, akkor $a = b^{-1}c \in A \cap (B \rtimes C) = 1 \Rightarrow b = c \in B \cap C = 1$. Így $(AB)C = (A \rtimes B) \rtimes C$.

Megjegyzés: Fordítva nem igaz az állítás, pl. $A_4 \cong (C_2 \times C_2) \rtimes C_3$, de A_4-ben nincs is $C_2 \rtimes C_3$ alakú csoport, mert az utóbbi csak direkt szorzat, tehát C_6 lehetne, de A_4-ben nincs hatodrendű elem.

4. *Legyen $|G| = 56$.*
a) Bizonyítsuk be, hogy G-ben valamelyik Sylow-részcsoport normálosztó.
b) Mutassuk meg, hogy $|G'| \leq 14$.

Megoldás: a) $|Syl_7(G)| \equiv 1 \pmod 7$, és osztója 8-nak, így csak 1 vagy 8 lehet. Ha 1, akkor a 7-Sylow normálosztó. Ha 8, akkor ez a 8 diszjunkt csoport (diszjunktak, mert prímrendűek) lefednek $8 \cdot 6 = 48$ hetedrendű elemet, tehát G-ben legföljebb 8 nem hetedrendű elem van, és ebbe csak egyetlen 2-Sylow fér. Tehát ebben az esetben a 2-Sylow lesz normálosztó.

b) Ha $P_2 \in Syl_2(G)$ normálosztó, akkor $|G/P_2| = 7 \Rightarrow G/P_2 \cong C_7$ Abel-csoport $\Rightarrow G' \leq P_2 \Rightarrow |G'| \leq 8$. Ha $P_7 \in Syl_7(G)$ normálosztó, akkor $|G/P_7| = 8$, és ennek van (centrumbeli) másodrendű normálosztója: H/P_7, ahol $H \lhd G$, és $|H/P_7| = 2$, azaz $|H| = 14$. De akkor $|G/H| = 4$ miatt G/H Abel, így $G' \leq H$, amiből $|G'| \leq |H| = 14$.

5. *Legyen* $|G| = 120$*, és tegyük fel, hogy van olyan* $H \leq G$*, amelyre* $|G : H| = 3$*. Bizonyítsuk be, hogy* G *feloldható.*

Megoldás: *I. megoldás:* Hattassuk G-t a H mellékosztályain! Ez ad egy $\varphi : G \to S_3$ homomorfizmust, amelynek magja, $\operatorname{Ker}\varphi \leq H$. Mivel $|H| = 40 = 2^3 \cdot 5$, H feloldható, és így $\operatorname{Ker}\varphi$ is az. Másrészt $G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi \leq S_3$, és S_3 is feloldható, tehát $G/\operatorname{Ker}\varphi$ is, és akkor G maga is feloldható.

II. megoldás: $|H| = 40 = 5 \cdot 8$, így $|Syl_5(H)| \mid 8$, és ez a $|Syl_5(H)| \equiv 1 \pmod 5$ feltétellel együtt azt adja, hogy $|Syl_5(H)| = 1$, tehát $P_5 \in Syl_5(H)$ normálosztó H-ban, vagyis $H \leq N_G(P_5)$. Viszont P_5 G-nek is 5-Sylowja, és az előbbiek miatt $|Syl_p(G)| = |G : N_G(P_5)| = 1$ vagy 3, de 3 nem lehet, tehát $P_5 \lhd G$. $P_5 \cong C_5$ nyilván feloldható, és $|G/P_5| = 2^3 \cdot 3$ miatt a faktora is, így maga G is feloldható.

6. *Tegyük fel, hogy* $|G| = p \cdot m$*, ahol* p *prím, és* m *minden prímosztója* p*-nél nagyobb. Bizonyítsuk be, hogy ha* G*-nek van* p *elemű normálosztója, akkor* $G \cong C_p \times H$ *valamilyen* H *csoportra.*

Megoldás: Legyen $P \lhd G$, $|P| = p$. A feltételek miatt p és m relatív prímek, így a Schur–Zassenhaus-tétel szerint P-nek van komplementuma: $G = P \rtimes H$. Ha $\varphi : H \to \operatorname{Aut} P$ a H hatása P-n a konjugálással, akkor $|\operatorname{Im}\varphi| \mid |AutC_p| = p - 1$, és $|\operatorname{Im}\varphi| = |G/\operatorname{Ker}\varphi| \mid |H| = m$. De m-nek nincs p-nél kisebb prímfaktora, így $(p-1, m) = 1$, tehát $|\operatorname{Im}\varphi| = 1$, ami azt jelenti, hogy a $P \rtimes H$ szemidirekt szorzat direkt szorzat.