1. *Bizonyítsuk be, hogy a D_n diédercsoport akkor és csak akkor nilpotens, ha n 2-hatvány!*

Megoldás: Ha $n = 2^k$, akkor $|D_n| = 2^{k+1}$, és minden p-csoport nilpotens.
Ha $n = 2^k \cdot m$, ahol $m \neq 1$ páratlan, akkor D_n-ben van m-edrendű forgatás ($f_1 = f^{n/m}$), és ez nem cserélhető fel a t tükrözéssel, ugyanis $t^{-1} f_1 t = f_1^{-1} \neq f_1$. Viszont egy nilpotens csoportban a relatív prím rendű elemek felcserélhetők egymással, így D_n nem lehet nilpotens.

2. *Határozzuk meg $GL_3(2)$-ben az $\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ alakú mátrixok által alkotott részcsoport rendjét és izomorfiatípusát.*

Megoldás: A három csillag helyére egymástól függetlenül kétféle elemet választhatunk, így a csoport elemszáma 8. Nézzük meg, hogy hányadrendű elemből hány van a csoportban!

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ac \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a számolásnál felhasználjuk, hogy $\mathbb{F}_2$-ben minden elem kétszerese 0), így a csoportban két negyedrendű, öt másodrendű, és 1 elsőrendű elem van. A nyolcadrendű csoportokban a másodrendű elemek száma:

C_8-ban 1, $C_4 \times C_2$-ben 3, $C_2 \times C_2 \times C_2$-ben 7, Q-ban 1, D_4-ben 5,

tehát a csoport csak D_4-gyel lehet izomorf.

3. *Bizonyítsuk be, hogy a $G = \langle x, y \,|\, y^{-1}xy = x^2,\ y^{-2}xy^2 = x^{-1},\ y^4 = 1 \rangle$ csoport véges. Határozzuk meg G rendjét!*

Megoldás: $x^{-1} = y^{-2}xy^2 = y^{-1}(y^{-1}xy)y = y^{-1}x^2y = (x^2)^2 = x^4 \Rightarrow x^5 = 1$. Mivel y normalizálja $\langle x \rangle$-et, $G = \langle x, y \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle$, és ebből $|G| \leq |\langle x \rangle| \cdot |\langle y \rangle| \leq 5 \cdot 4 = 20$. Másrészt az $\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle \cong C_5 \rtimes C_4$ csoport, az $a^b = a^2$ hatással (ilyen valóban van, mert a négyzetre emelés C_5-ön negyedrendű automorfizmus) kielégíti a relációkat, tehát homomorf képe G-nek, és így $|G| \geq 20 \Rightarrow |G| = 20$.

4. *Bizonyítsuk be, hogy S_4 2-tranzitívan hat a 3-Sylowjain a konjugálással!*

Megoldás: S_4 3-Sylowja harmadrendű, és S_4-ben 8 harmadrendű elem van, ez négy Sylowot ad.
I. megoldás: Elég belátni, hogy az $\langle (123) \rangle$, $\langle (124) \rangle$ párt bármelyik Sylow-párba el lehet vinni. Mivel bármely két 3-ciklusnak van két közös eleme, a kép $\langle (abc) \rangle$, $\langle (abd) \rangle$ alakú, az (abc) és (abd) generátorelemekbe pedig át lehet konjugálni az $(123), (124)$ párt azzal a permutációval, amelyik az $1, 2, 3, 4$ elemeket rendre az a, b, c, d elemekbe viszi.
II. megoldás: G tranzitív a 3-Sylowokon a Sylow-tétel miatt. Mivel semelyik Sylow nem normalizálhatja a másikat (mert akkor nagyobb 3-csoportot generálnának), az $\langle (123) \rangle$ stabilizátorából (123) fixpontmentesen, következésképpen ciklikusan hat a maradék három Sylowon, tehát a stabilizátor tranzitív a többi elemen.

5. *Bizonyítsuk be (a Burnside-féle $p^\alpha q^\beta$-tétel nélkül), hogy minden $8 \cdot 49$ rendű csoport feloldható!*

Megoldás: Legyen $|G| = 8 \cdot 49$, és $P \in Syl_7(P)$. A 7-Sylowok száma $|Syl_7(G)| \equiv 1 \pmod 7$ és $|Syl_7(G)| \mid 8$, így G-nek 1 vagy 8 darab 7-Sylowja van.
Ha 1, akkor $P \triangleleft G$, és P és G/P is p-csoport, így feloldhatók, tehát G is feloldható.
Ha 8, akkor $N_G(P) = P \leq C_G(P) \leq N_G(P)$ (felhasználva, hogy a 7^2 rendű P csoport szükségképpen kommutatív) $\Rightarrow N_G(P) = C_G(P)$, tehát a Burnside-féle normál-p-komplementumtétel szerint van olyan $N \triangleleft G$, amelyre $|N| = 8$. Ekkor is igaz, hogy N és G/N is p-csoport, tehát feloldhatók, és így G is az.

6. *a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy G véges csoportnak van hűséges, primitív csoporthatása, akkor $\Phi(G) = 1$.*
b) Lássuk be, hogy egy p-hatványrendű primitív permutációcsoport csak elemi Abel p-csoport lehet.

Megoldás: a) Ha a csoporthatás primitív, akkor a stabilizátorok maximálisak. Így $\Phi(G) \leq \cap_{\alpha \in \Omega} G_\alpha$, és az utóbbi 1, mert a csoporthatás hűséges.
b) Ha G primitív permutációcsoport, akkor az a) rész miatt $\Phi(G) = 1$. Viszont G p-csoport, ezért $G/\Phi(G)$ elemi Abel p-csoport, vagyis maga G elemi Abel p-csoport.