1. Adjunk példát olyan L hálóra, és annak egy S részhalmazára, hogy S nem részháló L-ben, de az L-en természetesen definiált részbenrendezés S-re való megszorítása az S-en is hálót definiál. Hány elemű a legkisebb ilyen L?

2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges részben rendezett halmazban teljesülnek az $(a \wedge b) \vee a = a$ és $(a \vee b) \wedge a = a$ elnyelési tulajdonságok azokra az a, b elemekre, amelyekre létezik $a \wedge b$, illetve $a \vee b$.

3. a) Bizonyítsuk be, hogy egy véges hálónak mindig van legkisebb és legnagyobb eleme, de végtelen hálóra ez nem feltétlenül igaz.
b) Bizonyítsuk be, hogy ha egy részbenrendezett halmaznak van legnagyobb eleme, és az elemek minden nem üres részhalmazának van legnagyobb alsó korlátja, akkor minden nem üres részhalmaznak van legkisebb felső korlátja, és így a részbenrendezés (teljes) hálót definiál.

4. Rajzoljuk föl az összes
a) 3- és 4-elemű részbenrendezett halmazt;
b) legföljebb 5-elemű hálót
izomorfia erejéig.

Egy L háló moduláris, ha minden $a, b, c \in L$-re $a \geq c$ esetén $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$.
A disztributív hálók nyilván modulárisak is.

5. Bizonyítsuk be, hogy N_5 nem moduláris, és fordítva, ha L nem moduláris, azaz valamely a, b, c elemekre nem teljesül a fenti összefüggés, akkor az $a \wedge (b \vee c)$, $(a \wedge b) \vee c$ és b elemek egy N_5-tel izomorf részhálót generálnak.

6. Rajzoljuk fel a következő csoportok részcsoporthálóját! Jelöljük meg bennük a normálosztókat!
a) C_4, C_{32}, $C_2 \times C_2$, $C_3 \times C_6$, C_{54};
b) a Q kvaterniócsoport;
c) D_4;
d) S_3, A_4;
e) a C_{p^∞} kváziciklikus csoport, azaz a p-hatványadik komplex egységgyökök multiplikatív csoportja.
Amelyik nem moduláris, vagy moduláris ugyan, de nem disztributív, abban mutassunk N_5-tel, illetve M_3-mal izomorf részhálót.

7. Határozzuk meg az összes olyan csoportot, amelynek a részcsoporthálója M_2, M_6, illetve M_7, ahol M_n azt az $(n+2)$-elemű hálót jelöli, amelynek n közbülső eleme páronként összehasonlíthatatlan.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy hálóban minden a, b, c elemre teljesül az
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
disztributív azonosság, akkor a duálisa,
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$
is teljesül minden a, b, c-re.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G véges csoportnak egyetlen maximális vagy egyetlen minimális részcsoportja van, akkor G p-csoport.