1. Leolvashatók-e egy csoport részcsoporthálójáról a következő tulajdonságok?
a) a csoport rendje;
b) a csoport végessége;
c) a normálosztóháló;
d) prímrendű részcsoportok;
e) végesen generált részcsoportok;
f) ciklikus részcsoportok;
g) a csoport kommutativitása.

Egy L háló Boole-háló, ha korlátos (azaz $0, 1 \in L$), disztributív, és minden $a \in L$ elemnek van komplementuma, azaz olyan $a' \in L$, amelyre $a \wedge a' = 0$ és $a \vee a' = 1$.

2. Bizonyítsuk be, hogy egy Boole-hálóban minden elemnek egyértelmű komplementuma van.

3. Bizonyítsuk be, hogy minden véges Boole-háló elemszáma 2-hatvány, és a háló izomorf egy halmaz hatványhalmazával. Mutassunk olyan végtelen Boole-hálót, amely nem izomorf semelyik hatványhalmazzal.

4. Bizonyítsuk be, hogy minden véges csoportnak van egy legnagyobb (azaz minden más ilyet tartalmazó) feloldható normálosztója.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha G véges nem kommutatív p-csoport, akkor G/G' nem lehet ciklikus. (Útmutatás: Lássuk be, hogy egy véges p-csoportban bármely nem triviális normálosztó metszi a centrumot.)

6. Legyen $x, y \in G$. Bizonyítsuk be, hogy
a) $[x, y] = [y, x]^{-1}$;
b) $yx = xy[y, x]$;
c) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$ és $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$.

7. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_3$ test fölötti 3×3-as invertálható felső háromszögmátrixok csoportjának kommutátorláncát, és a kommutátorlánc faktorainak izomorfiatípusát.

Hf1. Határozzuk meg az összes olyan véges csoportot, amelynek részcsoporthálója Boole-háló.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy ha $G' \leq Z(G)$, akkor bármely $x, y \in G$-re és n pozitív egész számra $(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{2}}$.