1. Legyen G véges csoport, és p prím.

a) Bizonyítsuk be, hogy G p-Sylowjainak a metszete normálosztó G-ben.

b) Bizonyítsuk be, hogy bármely p-hatványrendű normálosztó benne van mindegyik p-Sylowban.

2. a) Bizonyítsuk be, hogy minden G véges csoportra és minden p prímre van G-nek egy legnagyobb, azaz minden más ilyet tartalmazó p-hatványrendű normálosztója. (Ezt $O_p(G)$-vel jelöljük).

b) Bizonyítsuk be, hogy minden véges csoportnak van egy legnagyobb nilpotens normálosztója. (Ez a G Fitting-csoportja, $F(G)$.)

3. Bizonyítsuk be, hogy minden G véges feloldható csoportnak van olyan G normálosztóiból álló normállánca, amelynek minden faktora nilpotens, és ebből a legrövidebb az, amelyet az $F_0 = 1$, $F_1(G) = F(G)$, $\ldots$, $F_{k+1}(G)/F_k(G) = F(G/F_k(G))$ rekurzióval kapunk.

4. Milyen π-re vannak az S_5 szimmetrikus csoportnak π-Hall-részcsoportjai?

5. Adjuk meg az S_6 csoport valamelyik 2-Sylowját. Mi lesz ennek a 2-csoportnak a felső és az alsó centrállánca?

6. Bizonyítsuk be, hogy egy nilpotens csoportban minden nem triviális normálosztó metszi a centrumot!

7*. Bizonyítsuk be, hogy egy 16-elemű, 3 nilpotenciaosztályú csoportnak pontosan egy 2 indexű ciklikus normálosztója van. (Útmutatás: Bizonyítsuk be, hogy $|Z(G)| = 2$, és hogy G-nek egyetlen 2 indexű Abel normálosztója van.)

Hf1. Mi a legkisebb n, amelyre S_n-nek van olyan nilpotens részcsoportja, amely nem Abel-csoport, és nem is p-csoport? (Útmutatás: Mit mondhatunk ennek a nilpotens részcsoportnak a Sylow-részcsoportjairól?)

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy egy véges G csoportban minden p prímre van olyan legkisebb (azaz minden más ilyenben benne levő) normálosztó, amelynek az indexe p-hatvány, és ha G feloldható, akkor valamelyik prímre ez nem a teljes G.