

1. A H és N csoportok külső szemidirekt szorzata ($N \rtimes H$ vagy $N \rtimes_{\varphi} H$) a $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ hatásra nézve a H és N Descartes-szorzata a $(h, n)(h', n') = (hh', n^{h'\varphi}n')$ szorzással. Bizonyítsuk be, hogy
 - a) így valóban csoportot kapunk;
 - b) $\tilde{H} = \{(h, 1) \mid h \in H\}$ a H -val izomorf részcsoport $N \rtimes H$ -ban;
 - c) $\tilde{N} = \{(1, n) \mid n \in N\}$ az N -nel izomorf normálosztó $N \rtimes H$ -ban;
 - d) $N \rtimes H$ a \tilde{H} és \tilde{N} belső szemidirekt szorzata, ahol $m = n^{h\varphi}$ -re $\tilde{m} = \tilde{h}^{-1}\tilde{n}\tilde{h}$.
 2. Izomorf-e egymással a $Q \times C_2$ és a $C_4 \rtimes C_4$ csoport, ha az utóbbiban a C_4 részcsoport generátoreleme invertálással hat a C_4 normálosztón?
 3. Hány nem izomorf 12-edrendű csoport van? Keressünk mindegyikhez vele izomorf permutációcsoportot!
 4. Határozzuk meg Q automorfizmuscsoportját!
 5.
 - a) Bizonyítsuk be, hogy egy p^n rendű csoport nilpotenciaosztálya legföljebb $n - 1$.
 - b) Lássuk be, hogy a $D_{2^{n-1}}$ diédercsoport nilpotenciaosztálya pontosan $n - 1$.
 6. Legyen G a kocka egybevágósági csoportja. Ezt tekinthetjük S_8 részcsoportjának is a csúcsokon való hatással.
 - a) Mi a G rendje?
 - b) Hány orbitja van G -nek, ha
 - b1) a kételemű csúcshalmazokon hattatjuk;
 - b2) a háromelemű csúcshalmazokon hattatjuk?
 - c) Hány elemű orbitjai vannak a G hatásának a kocka teljes felszínén?
 7. Bizonyítsuk be, hogy egy legalább két elemen ható tranzitív csoportthatásban van fixpontos elem.
 8. Hányféleképpen tudjuk feketére színezeni egy 3×3 -as négyzetháló (táblázat) három kis négyzetét, ha azonosaknak tekintjük azokat a színezéseket, amelyeket forgatással vagy tükrözéssel megkaphatunk egymásból? És ha csak a forgatással egymásba vihető színezéseket tekintjük azonosnak?
- Hf1.** Bizonyítsuk be, hogy egy $S_3 \rtimes C_5$ szorzat csak direkt szorzat lehet! (Útmutatás: hogyan hathat a C_5 generátorelemével való konjugálás S_3 -on?)
- Hf2.** Hányféleképpen lehet egy 4×4 -es kis négyzetből álló négyzetben négy mezőt beszínezeni, ha az elforgatással vagy tükrözéssel egymásba vihető színezéseket azonosnak tekintjük?