**1.** a) Bizonyítsuk be, hogy az $S_n$-nek az $A_n$-be eső konjugáltosztályai vagy egyetlen konjugáltosztályt alkotnak $A_n$ szerint is, vagy két, azonos méretű konjugáltosztályra esnek szét!

b) Bizonyítsuk be, hogy egy konjugáltosztály pontosan akkor esik szét $A_n$-ben, ha az elemei ciklusfelbontásában nincs páros hosszúságú ciklus, és a páratlan ciklushosszak mindegyikéből (beleértve az 1-ciklusokat) legföljebb 1 van!

**2.** Bizonyítsuk be, hogy ha $G = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, és $H \leq G$-re $|G : H| = k$, akkor $H$-nak van $\leq (n-1)k + 1$ elemű generátorrendszere!

**3.** Keressünk az $F(x, y)$ szabad csoportban 2 indexű részcsoportot (használjuk hozzá a $C_2$ egy prezentációját), és lássuk be, hogy ennek a csoportnak van 3 elemű szabad generátorrendszere!

**4.** Használjunk Jerrum-szűrőt a $G = \langle (25), (1543), (13), (235), (345) \rangle \leq S_5$ csoport generátorrendszerének redukálásához!

**5.** Határozzuk meg $S_5$-ben a $G = \langle (25)(34), (1325) \rangle$ részcsoport elemszámát a Schreier–Sims-algoritmussal!

**6.** Oldjuk meg a következő diofantoszi egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3x & - & y & & & = & 1 \end{array}$$

**7.** Adjuk meg a következő Abel-csoportok generátorokkal megadott részcsoportjának és a részcsoporttal vett faktorcsoportnak a kanonikus alakját!

a) $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus \langle c \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, és $H = \langle 2a - 2b + 3c,\ 4b - 3c \rangle$

b) $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus \langle c \rangle \cong \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, és $H = \langle 4a - c,\ b + c \rangle$.