1. *Legyen G véges csoport, és p prím.*
a) Bizonyítsuk be, hogy G p-Sylowjainak a metszete normálosztó G-ben.
b) Bizonyítsuk be, hogy bármely p-hatványrendű normálosztó benne van mindegyik p-Sylowban.

Megoldás: a) Mivel minden p-Sylow-részcsoport konjugált, megkaphatjuk az összes p-Sylowot egy P p-Sylow konjugáltjaiként, és így a metszetük $P_0 := \bigcap_{g \in G} P^g$. De akkor tetszőleges $h \in G$-re $P_0^h = \bigcap_{g \in G} P^{gh}$, ami megegyezik P_0-lal, minthogy rögzített h-ra $\{ gh \mid g \in G \} = G$.
b) Ha $N \lhd G$ p-csoport, akkor van olyan $P \in Syl_p(G)$, hogy $N \leq P$. De bármely P_1 p-Sylowhoz van olyan $g \in G$, hogy $P_1 = P^g$, így $N = N^g \leq P^g = P_1$.

2. *a) Bizonyítsuk be, hogy minden G véges csoportra és minden p prímre van G-nek egy legnagyobb, azaz minden más ilyet tartalmazó p-hatványrendű normálosztója. (Ezt $O_p(G)$-vel jelöljük).*
b) Bizonyítsuk be, hogy minden véges csoportnak van egy legnagyobb nilpotens normálosztója. (Ez a G Fitting-csoportja, $F(G)$.)

Megoldás: a) Az előző feladatban definiált normálosztó, az összes p-Sylow metszete a legnagyobb p-normálosztó, ugyanis az 1.a) feladat szerint normálosztó, és az 1.b) feladat szerint tartalmazza mindegyik p-normálosztót.
b) Ha $p_1, \ldots, p_r$ a $|G|$ prímosztói, akkor $N = O_{p_1} O_{p_2} \cdots O_{p_r}$ normálosztó, mert normálosztók generátuma, és nilpotens is, mivel az $O_{p_1}, \ldots, O_{p_r}$ Sylowjainak direkt szorzata: O_{p_i} rendje p_i-hatvány, a többi szorzatának a rendje osztója a rendek szorzatának, tehát az meg p_i'-szám, így O_{p_i} nem metszi a többi O_{p_j} generátumát. Másrészt tetszőleges N nilpotens normálosztó Sylowjai karakterisztikus részcsoportok N-ben, így normálosztók G-ben is, és ezért benne vannak a megfelelő O_{p_i} részcsoportban, és így maga N benne van az O_{p_i}-k generátumában. Tehát $F(G) = O_{p_1} O_{p_2} \cdots O_{p_r}$.

3. *Bizonyítsuk be, hogy minden G véges feloldható csoportnak van olyan G normálosztóiból álló normállánca, amelynek minden faktora nilpotens, és ebből a legrövidebb az, amelyet az $F_0 = 1$, $F_1(G) = F(G)$, $\ldots$, $F_{k+1}(G)/F_k(G) = F(G/F_k(G))$ rekurzióval kapunk.*

Megoldás: Bármely feloldható csoportnak van Abel normálosztója, így a Fitting-részcsoportja nem 1. Ezt azt jelenti, hogy a feladatban definiált normállánc minden lépésben növekszik, amíg el nem éri a G-t, és ha G véges, akkor szükségszerűen el is éri. Másrészt ha $1 = N_0 < N_1 < \ldots < N_{k-1} < N_k = G$ olyan normálosztókból álló lánc, amelynek minden faktora nilpotens, akkor teljes indukcióval bizonyíthatjuk, hogy ez alatta halad a Fitting-láncnak: ha $N_i \leq F_i(G)$, és N_{i+1}/N_i nilpotens normálosztó G/N_i-ben, akkor $N_{i+1}F_i(G)/F_i(G) \cong N_{i+1}/(N_{i+1} \cap F_i(G)) \cong (N_{i+1}/N_i)/((N_{i+1} \cap F_i(G))/N_i)$ egy nilpotens csoport faktora, így nilpotens, és nyilván normálosztó G-ben, tehát $N_{i+1} \leq N_{i+1}F_i(G) \leq F_{i+1}(G)$. Ebből következik, hogy a Fitting-lánc is felér legföljebb k lépésben.

4. *Milyen π-re vannak az S_5 szimmetrikus csoportnak π-Hall-részcsoportjai?*

Megoldás: Elég az $|S_5| = 5!$ prímosztóinak részhalmazaira megválaszolni a kérdést, azaz amikor $\pi \subseteq \{ 2, 3, 5 \}$. A 0- és 3-elemű π halmazra az 1 és S_5 π-Hall, az egyeleműekre a megfelelő Sylow-részcsoportok. $\pi = \{2,3\}$-ra egy π-Hall részcsoportnak 24-eleműnek kell lennie, és ilyen részcsoport az S_4, azaz az 5 stabilizátora. A $\pi = \{3,5\}$-re 15-elemű részcsoportot kell keresnünk. De egy 15-elemű csoportnak mindkét Sylowja normálosztó, ezért a csoport izomorf a $C_3 \times C_5 \cong C_{15}$ csoporttal, de S_5-ben nincs 15-ödrendű elem: a ciklusfelbontásában kellene lennie egy 15-ciklusnak, vagy diszjunkt 5- és 3-ciklusnak. Tehát S_5-ben nincs $\{3,5\}$-Hall-részcsoport. Végül egy $\{2,5\}$-Hall-részcsoport 40-elemű, azaz 3 indexű lenne. De akkor a mellékosztályokon való jobbszorzás adna egy olyan homomorfizmust S_3-ba, amelynek magja benne van a 3 indexű részcsoportban, és legföljebb 6 indexű. Ilyen normálosztója viszont nincs S_5-nek, ugyanis az nem triviálisan metszené az A_5 alternáló csoportot, amelyről tudjuk, hogy egyszerű. Tehát S_5-nek $\{2,5\}$-Hall-részcsoportja sincs.

5. *Adjuk meg az S_6 csoport valamelyik 2-Sylowját. Mi lesz ennek a 2-csoportnak a felső és az alsó centrállánca?*

Megoldás: $|S_6| = 6!$-nak 2^4 a legnagyobb prímhatvány osztója. 2^3 rendű részcsoportot már S_4-ben is találunk (ez S_4 2-Sylowja, a D_4 diédercsoport, a négyzet négy csúcsán ható permutációcsoportnak tekintve), és ezt centralizálja az (56) transzpozíció, így együtt egy $D_4 \times C_2$-vel izomorf részcsoportot generálnak S_6-ban.

Könnyen látható, hogy két csoportra $Z(H \times K) = Z(H) \times Z(K)$, és $(H \times K)/Z(H \times K) = (H \times K)/(Z(H) \times Z(K) \cong (H/Z(H)) \times (K/Z(K))$, tehát a felső centrállánc addigra ér fel, mire D_4 és C_2 centrállánca is felér, ez pedig a második lépés:

$$1 < Z(D_4) \times C_2 < D_4 \times C_2.$$

Kommutátorokra igaz az az összefüggés, hogy ha $H_1, H_2 \leq H$ és $K_1, K_2 \leq K$, akkor $[H_1 \times K_1,\ H_2 \times K_2] = [H_1, H_2] \times [K_1, K_2]$ (mivel $[(h_1, k_1), (h_2, k_2)] = ([h_1, h_2], [k_1, k_2])$). Így $K_i(D_4 \times C_2) = K_i(D_4) \times K_i(C_2)$ minden i-re. Ebből adódik, hogy $D_4 \times C_2$ ferde kommutátorlánca

$$D_4 \times C_2 > Z(D_4) \times 1 > 1,$$

vagy ezt is növekvő sorrendben felírva:

$$1 < Z(D_4) \times 1 < D_4 \times C_2.$$

Láthatjuk, hogy a felső centrállánc fölötte halad az alsónak (a ferde kommmutátorláncnak), de ugyanolyan hosszúságú.

6. *Bizonyítsuk be, hogy egy nilpotens csoportban minden nem triviális normálosztó metszi a centrumot!*

Megoldás: Legyen $1 < Z_1 < \ldots < Z_{k-1} < Z_k = G$ centrállánc, és $1 \neq N \lhd G$, továbbá tegyük fel, hogy i a legnagyobb olyan index, amelyre $N \cap Z_i = 1$. Ekkor $[G, N \cap Z_{i+1}] \leq [G, Z_{i+1}] \leq Z_i$ a centrállánc definíciója alapján, és $[G, N \cap Z_{i+1}] \leq [G, N] \leq N$, mivel N normálosztó, így $[G, N \cap Z_{i+1}] \leq N \cap Z_i = 1 \Rightarrow 1 \neq N \cap Z_{i+1} \leq Z(G)$.

7*. *Bizonyítsuk be, hogy egy 16-elemű, 3 nilpotenciaosztályú csoportnak pontosan egy 2 indexű ciklikus normálosztója van. (Útmutatás: Bizonyítsuk be, hogy $|Z(G)| = 2$, és hogy G-nek egyetlen 2 indexű Abel normálosztója van.)*

Megoldás: Mivel G 2-csoport, a centruma legalább 2-elemű. Viszont ha legalább 4-elemű lenne, akkor $G/Z(G)$ már Abel-csoport lenne, így G felső centrállánca két lépésben felérne, ami ellentmond a feltevésnek. Tehát $|Z(G)| = 2$.

Ha $\exists A_1, A_2 \leq G$ Abel normálosztók, amelyekre $|G : A_1| = |G : A_2| = 2$, és $A_1 \neq A_2$, akkor ezek maximális részcsoportok is, így $A_1A_2 = G$, és ebből $A_1/(A_1 \cap A_2) \cong A_1A_2/A_2 = G/A_2$ 2-odrendű, tehát $|G : A_1 \cap A_2| = |G : A_1| \cdot |A_1 : A_1 \cap A_2| = 4$. Viszont $A_1 \cap A_2$ centralizátorában benne van A_1 és A_2 is, így $A_1A_2 = G$ is, azaz $A_1 \cap A_2 \leq Z(G)$, ami ellentmond annak, hogy $|Z(G)| = 2$

Mivel $cl(G) = 3$, $G/Z(G)$ nem lehet kommutatív, és így van 4-edrendű eleme. Ennek az ősképe G-ben, $a \in G$, 4-ed vagy 8-adrendű. Ha nyolcadrendű, akkor ez generálja az egyetlen 8-adrendű Abel normálosztót. Marad az az eset, amikor $C_4 \cong \langle a \rangle$ diszjunkt $Z(G)$-től, tehát $A := Z(G) \times \langle a \rangle \cong C_4 \times C_2$. De A-ban a^2 az egyetlen olyan másodrendű elem, amelynek van A-beli négyzetgyöke, ezért $\langle a \rangle$ char $A \lhd G \Rightarrow \langle a^2 \rangle \lhd G$, miközben $\langle a^2 \rangle \cap Z(G) = 1$, és ez ellentmond a 6. feladat állításának.

Hf1. *Mi a legkisebb n, amelyre S_n-nek van olyan nilpotens részcsoportja, amely nem Abel-csoport, és nem is p-csoport? (Útmutatás: Mit mondhatunk ennek a nilpotens részcsoportnak a Sylow-részcsoportjairól?)*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy egy véges G csoportban minden p prímre van olyan legkisebb (azaz minden más ilyenben benne levő) normálosztó, amelynek az indexe p-hatvány, és ha G feloldható, akkor valamelyik prímre ez nem a teljes G.*