1. *A H és N csoportok külső szemidirekt szorzata ($N \rtimes H$ vagy $N \rtimes_\varphi H$) a $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ hatásra nézve a H és N Descartes-szorzata a $(h,n)(h',n') = (hh', n^{h'\varphi}n')$ szorzással. Bizonyítsuk be, hogy*

a) így valóban csoportot kapunk;

b) $\tilde{H} = \{(h,1) \mid h \in H\}$ a H-val izomorf részcsoport $N \rtimes H$-ban;

c) $\tilde{N} = \{(1,n) \mid n \in N\}$ az N-nel izomorf normálosztó $N \rtimes H$-ban;

d) $N \rtimes H$ a $\tilde{H}$ és $\tilde{N}$ belső szemidirekt szorzata, ahol $m = n^{h\varphi}$-re $\tilde{m} = \tilde{h}^{-1}\tilde{n}\tilde{h}$.

Megoldás: a) Legyen G a feladatban definiált külső szemidirekt szorzat, $N \rtimes H$.

A G-beli szorzás asszociatív:
$((h_1,n_1)(h_2,n_2))(h_3,n_3) = (h_1h_2,\ n_1^{h_2\varphi}n_2)(h_3,n_3) = (h_1h_2h_3,\ (n_1^{h_2\varphi}n_2)^{h_3\varphi}n_3) = (h_1h_2h_3,\ n_1^{(h_2h_3)\varphi}n_2^{h_3\varphi}n_3)$
$(h_1,n_1)((h_2,n_2)(h_3,n_3)) = (h_1,n_1)(h_2h_3,\ n_2^{h_3\varphi}n_3) = (h_1h_2h_3,\ n_1^{(h_2h_3)\varphi}n_2^{h_3\varphi}n_3)$.

$(1,1)$ az egységelem:
$(1,1)(h,n) = (h, 1^{h\varphi}n) = (h,1n) = (h,n)$ és $(h,n)(1,1) = (h, n^{1\varphi}1) = (h,n)$.

Van inverz: $(h,n)^{-1} = (n^{h^{-1}\varphi})^{-1}$:
$(h,n)(h^{-1},(n^{h^{-1}\varphi})^{-1}) = (1, n^{h^{-1}\varphi}(n^{h^{-1}\varphi})^{-1}) = (1,1)$ és
$(h^{-1},(n^{h^{-1}\varphi})^{-1})(h,n) = (1,\ ((n^{h^{-1}\varphi})^{-1})^{h\varphi}n) = (1,\ (n^{(h^{-1}h)\varphi})^{-1}n) = (1, n^{-1}n) = (1,1)$.

b) A $H \to G$, $h \mapsto (h,1)$ leképezés nyilvánvalóan injektív és művelettartó: $(h,1)(h',1) = (hh', 1^{h'\varphi}1) = (hh',1)$, és képe $\tilde{H}$.

c) Az $N \to G$, $n \mapsto (1,n)$ leképezés injektív és művelettartó: $(1,n)(1,n') = (1, n^{1\varphi}n') = (1,nn')$, képe az $\tilde{N}$, és a d) részben bizonyítjuk, hogy $G = \tilde{H}\tilde{N}$, és $\tilde{N}$ zárt a $\tilde{H}$-beli elemekkel való konjugálásra, így $\tilde{N} \lhd G$.

d) Láttuk, hogy $\tilde{H}$ részcsoport, $\tilde{N}$ normálosztó, a metszetük csak az $(1,1)$ egységelemet tartalmazza, és $(h,1)(1,n) = (h, 1^{1\varphi}n) = (h,n)$ miatt $G = \tilde{H}\tilde{N}$. Továbbá $\tilde{h}^{-1}\tilde{n}\tilde{h} = (h,1)^{-1}(1,n)(h,1) = (h^{-1},1)(1,n)(h,1) = (h^{-1},n)(h,1) = (1,n^{h\varphi}) = \tilde{m} \in \tilde{N}$, tehát $\tilde{N}$ normálosztó G-ben, és így G a $\tilde{N}$ normálosztó és $\tilde{H}$ részcsoport belső szemidirekt szorzata.

2. *Izomorf-e egymással a $Q \times C_2$ és a $C_4 \rtimes C_4$ csoport, ha az utóbbiban a C_4 részcsoport generátoreleme invertálással hat a C_4 normálosztón?*

Megoldás: Mindkét csoport 16-odrendű, sőt még az elemrendek eloszlása is ugyanaz: $Q \times C_2$-ben a negyedrendűek száma $6 \cdot 2 = 12$, a másodrendűeké pedig $2 \cdot 2 - 1 = 3$, ennél nagyobb rendű pedig nincs; az $\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle \cong C_4 \rtimes C_4$ csoportban $(b^k a^\ell)^2 = b^{2k}(a^{b^k})^\ell a^\ell = b^{2k}a^{(-1)^k 2\ell} = 1 \Leftrightarrow k$ és ℓ páros, és ennek a négyzete emiatt már 1, tehát 3 darab másodrendű és $16 - 4 = 12$ darab negyedrendű elem van ebben a csoportban is.

A centrum mindkettőben 4-edrendű elemi Abel-csoport: $Z(Q \times C_2) = Z(Q) \times Z(C_2) = \langle -1 \rangle \times C_2$, és a második csoportban a^2 és b^2 is centrális ($(a^2)^b = (a^b)^2 = a^{-2} = a^2$, és $a^{b^2} = (a^{-1})^{-1} = a$), és $\langle a^2, b^2 \rangle$-nél nagyobb nem lehet a centrum, mert akkor a faktora ciklikus lenne, vagyis a csoport kommutatív volna. Ugyanezért a centrum faktora mindkettőben izomorf $C_2 \times C_2$-vel.

A kommutátor-részcsoport mindkettőben másodrendű: $(Q \times C_2)' = Q' \times C_2' = \langle -1 \rangle \times 1 \cong C_2$, és a másodikban $\langle a^2 \rangle$ olyan normálosztó, amelynek a faktora Abel, ugyanis $\bar{a}^b = \overline{a^{-1}} =$

$\bar{a}$, és ennél kisebb pedig nem lehet a kommutátor. Viszont a kommutátorral vett faktor nem izomorf: az elsőben $(Q/Q') \times C_2 \cong C_2 \times C_2 \times C_2$, a másodikban pedig $\langle \bar{a} \rangle \times \langle \bar{b} \rangle \cong C_2 \times C_4$, így $Q \times C_2 \ncong C_4 \rtimes C_4$.

3. *Hány nem izomorf* 12*-edrendű csoport van? Keressünk mindegyikhez vele izomorf permutációcsoportot!*

Megoldás: Ha a csoport kommutatív, akkor $C_3 \times C_2 \times C_2$-vel vagy $C_3 \times C_4$-gyel izomorf. Most tegyük fel, hogy $|G| = 12$, és G nem kommutatív.

Először belátjuk, hogy G valamelyik Sylowja normálosztó. Valóban, mivel $|Syl_3(G)| \equiv 1 \pmod 3$ és $|Syl_3(G)| \mid 4$, a 3-Sylowok száma 1 vagy 4. Ha 1, akkor a 3-Sylow normálosztó, ha 4, akkor — minthogy a 3-Sylowok prímrendűek, így diszjunktak — G-ben pontosan $2 \cdot 4 = 8$ harmadrendű elem van, és a maradék $12 - 8 = 4$ elemű halmazba csak egy 2-Sylow fér, így ekkor a 2-Sylow normálosztó. A Sylowok rendjéből következik, hogy mindegyik kommutatív, és a 3-Sylow csak C_3-mal, a 2-Sylow csak C_4-gyel vagy $C_2 \times C_2$-vel lehet izomorf.

Ha a 3-Sylow normálosztó, akkor $G = P_3 \rtimes P_2$ (ahol P_3 a 3-Sylow, és P_2 az egyik 2-Sylow), mert diszjunktak, és a generátumuk 3-mal és 4-gyel is osztható, tehát csak az egész G lehet. A $P_3 \cong C_3$ csoport egyetlen nemtriviális automorfizmusa az invertálás. Tehát ha $P_3 = \langle a \rangle$ és $P_2 = \langle b \rangle \cong C_4$, akkor $a^b = a^{-1}$. Ha $P_2 \cong C_2 \times C_2$, akkor a $P_2 \to \mathrm{Aut}(C_3)$ homomorfizmus magja 2-elemű (legyen $\langle b \rangle$), és annak van komplementuma $C_2 \times C_2$-ben (legyen $\langle c \rangle$), tehát $\langle b, c \rangle$ hatása $P_3 = \langle a \rangle$-n: $b^{-1}ab = a$, és $c^{-1}ac = a^{-1}$.

Ha a 2-Sylow normálosztó, és $P_2 \cong C_4$, akkor $\mathrm{Aut}(C_4) \cong C_2$ miatt egy $P_3 \to \mathrm{Aut}(C_4)$ homomorfizmus csak triviális lehet, tehát ekkor G kommutatív lenne. Viszont ha $P_2 \cong C_2 \times C_2$, akkor egy harmadrendű automorfizmus a három másodrendű elemet csak ciklikusan permutálhatja, tehát a generátorelemeket alkalmasan megválasztva a szemidirekt szorzat $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, ahol $a^c = b$ and $b^c = ab$. Tehát három nemkommutatív 12-elemű csoportot találtunk, amelyek nyilván nem izomorfak egymással, mert a 2-, illetve 3-Sylowok száma, illetve izomorfiatípusa különbözik.

A kommutatívakhoz $\langle (12), (34), (567) \rangle$ és $\langle (1234), (567) \rangle$, a másik háromhoz rendre $\langle (123), (13)(4567) \rangle$, $\langle (123), (13), (45) \rangle$ és A_4 megfelelő permutációcsoportok.

4. *Határozzuk meg Q automorfizmuscsoportját!*

Megoldás: Q automorfizmusait meghatározza az i és a j képe, mivel ezek generálják Q-t, és i képe $\pm i, \pm j, \pm k$ közül akármelyik lehet, j képe pedig bármelyik negyedrendű, amely nincs benne i képének generátumában (könnyen ellenőrizhető, hogy $i\varphi$, $j\varphi$ és $k\varphi = (i\varphi) \cdot (j\varphi)$ ezek után kielégítik ugyanazokat a szorzási szabályokat, mint i, j, k. Tehát $|\operatorname{Aut} Q| = 24$. Most belátjuk, hogy ez a csoport izomorf S_4-gyel. Ehhez elég megadni egy szürjektív homomorfizmust az S_4-be, ami az elemszámok egyenlősége miatt izomorfizmus is lesz. A Q csoport automorfizmusai permutálják az $A_1 = \{ \{ i, j, k \}, \{ -i, -j, -k \} \}$, $A_2 = \{ \{ i, j, -k \}, \{ -i, -j, k \} \}$, $A_3 = \{ \{ i, -j, k \}, \{ -i, j, -k \} \}$, $A_4 = \{ \{ -i, j, k \}, \{ i, -j, -k \} \}$ halmazokat. Ezeken a $\sigma : i \mapsto j$, $j \mapsto -i$, $k \mapsto j(-i) = k$ automorfizmus az (A_1, A_4, A_2, A_3) 4-ciklussal hat, a $\tau : i \mapsto -i$, $j \mapsto k$, $k \mapsto (-i)k = j$ automorfizmus pedig az (A_1, A_4) transzpozícióval. Mivel ezek ketten kigenerálják az egész szimmetrikus csoportot, a kapott $\operatorname{Aut} Q \to S_{\{ A_1, A_2, A_3, A_4 \}} \cong S_4$ homomorfizmus szürjektív.

5. *a) Bizonyítsuk be, hogy egy p^n rendű csoport nilpotenciaosztálya legföljebb $n-1$.*
b) Lássuk be, hogy a $D_{2^{n-1}}$ diédercsoport nilpotenciaosztálya pontosan $n-1$.

Megoldás: a) Tegyük fel, hogy $Z_0 = 1 < Z_1 < \ldots < Z_{k-1} < Z_k = G$ a fölső centrállánc. Ha $G/Z_{k-1} \cong (G/Z_{k-2})/(Z_{k-1}/Z_{k-2}) \cong (G/Z_{k-2})/Z(G/Z_{k-2})$ ciklikus, akkor G/Z_{k-2} Abel, így $Z_{k-1} = G$ lenne. Tehát G/Z_{k-1} rendje legalább p^2, a többi faktoré legalább p, így $k \le n-1$.

b) Legyen $G = D_{2^{n-1}} = \langle f, t\rangle$, ahol f a $(2\pi)/2^{n-1}$ szögű forgatás, t pedig az egyik tükrözés. Ekkor $Z(G) = \langle f^{2^{n-2}}\rangle$, mert $(f^k)^t = f^{-k} = f^k \Leftrightarrow 2^{n-1} \mid 2k \Leftrightarrow 2^{n-2} \mid k$, tehát a forgatások közül más nem lehet a centrumban, és bármely tükrözés az f-et az inverzébe konjugálja, tehát a tükrözések is mind kívül vannak a centrumon. A $H = G/Z(G)$ csoportot generálja a 2^{n-2} rendű $\bar{f}$ és a másodrendű $\bar{t}$ elem, amelyekre $\bar{t}\bar{f}\bar{t} = \bar{f}^{-1}$, tehát $H \cong D_{2^{n-2}}$. Mivel $cl(D_4) = 2$, teljes indukcióval beláthatjuk a fenti indukciós lépés alapján, hogy $cl(D_{2^{n-1}}) = n-1$.

6. *Legyen G a kocka egybeválgósági csoportja. Ezt tekinthetjük S_8 részcsoportjának is a csúcsokon való hatással.*
a) Mi a G rendje?
b) Hány orbitja van G-nek, ha
b1) a kételemű csúcshalmazokon hattatjuk;
b2) a háromelemű csúcshalmazokon hattatjuk?
c) Hány elemű orbitjai vannak a G hatásának a kocka teljes felszínén?

Megoldás: a) Az csoport rendjét kiszámíthatjuk a $|G| = |\alpha G||G_\alpha|$ összefüggés többszöri használatával. Jelöljük a kocka csúcsait az $1, 2, \ldots, 8$ számokkal, ahol 1 élszomszédai $2, 3, 4$, és a k-ból kiinduló testátló másik végpontja $9-k$. Az 1 csúcs orbitja 8-elemű (lapközéppontokat összekötő tengely körüli forgatásokkal is át lehet vinni az 1-et bármely másik csúcsba), így $|G| = 8|G_1|$. Az 1-et helybenhagyó egybevágóságok az 1 szomszédait csak az 1 szomszédaiba vihetik, és azokat egymásba is lehet vinni az 1–8 testátló körüli 120°-os forgatásokkal, ezért a 2-nek a G_1 szerinti orbitja 3-elemű, tehát $|G| = 8|G_1| = 24|G_{1,2}|$. A $G_{1,2}$ elemei a 3-at csak 3-ba vagy 4-be vihetik, és az 1–2 élen és a kocka középpontján átfektetett síkra való tükrözés a 3-at valóban átviszi 4-be, miközben helyben hagyja az 1-et és a 2-t. Végül $G_{1,2,3}$ helyben hagyja 4-et, és így az egész kockát is, tehát $|G| = 24 \cdot 2|G_{1,2,3}| = 48$.

b1) Az élek, a lapátlók, és a testátlók (mint a végpontjaik halmazai) három különböző orbitba esnek, már a hosszuk alapján is, viszont könnyen látható, hogy az azonos fajták átvihetők egymásba, mozgatással is. Tehát erre a hatásra nézve G-nek három orbitja van (12, 12 és 4 elemszámmal).

b2) Itt is három orbit van: egy lap három csúcsa, a kocka középpontos tükrözésére nézve szemközti él egyik pontjával, és három olyan pont, amelyek nem élszomszédosak.

c) A csúcsok 8-elemű, az élközéppontok 12-elemű orbitot alkotnak, az élek többi pontjai 24-elemű orbitokban vannak, a lapközéppontok egy 6-elemű orbitot alkotnak, a lapátlók és a lapok középvonalainak eddig nem vizsgált pontjai 24-elemű orbitokban vannak, a lapok többi pontja pedig 48-eleműekben.

7. *Bizonyítsuk be, hogy egy legalább két elemen ható tranzitív csoporthatásban van fixpontmentes elem.*

Megoldás: A Burnside-lemma szerint a fixpontok átlaga itt 1, viszont az egységelemnek minden pont fixpontja, tehát $|Fix(1)| > 1$, így kell lenni olyan $g \in G$-nek, amelynek a fixpontszáma 1-nél kisebb, azaz amely fixpontmentes.

8. *Hányféleképpen tudjuk feketére színezni egy 3×3-as négyzetháló (táblázat) három kis négyzetét, ha azonosaknak tekintjük azokat a színezéseket, amelyeket forgatással vagy tükrözéssel megkaphatunk egymásból? És ha csak a forgatással egymásba vihető színezéseket tekintjük azonosnak?*

Megoldás: Azt kell megszámolnunk, hogy az összes (azaz $\binom{9}{3} = 84$) színezésen a négyzet D_4 szimmetriacsoportjának, illetve a forgatások által alkotott $\langle f \rangle \cong C_4$ csoportnak hány orbitja van. Ehhez a Burnside-lemma szerint elég a csoportelemek fixpontszámát meghatározni.
$|Fix(1)| = 84$, $|Fix(f)| = |Fix(f^{-1})| = 0$ (ugyanis ha kiszínezünk egy nem középső négyzetet, akkor legalább 4 színezett négyzetnek kell lennie) $|Fix(f^2)| = 4$ (mert a 4 középpontosan tükrös pontpárból egyet kell kiválsztani a középpont mellé), az átlóra való tükrözések fixpontszáma $1 + 3 \cdot 3 = 10$ (vagy a három átlóbeli pontot választjuk, vagy egyet az átlóról, és az egyik oldalon levő három pont közül is egyet választunk ki, meg a másik oldali tükörképét), és a középvonalra való tükrözésekre is ugyanígy 10-et kapunk, mert ott is 3 pont van a tengelyen, és $3-3$ a két oldalán. Tehát a fixpontok átlaga a teljes diédercsoportnál $\frac{1}{8}(84 + 2 \cdot 0 + 4 + 4 \cdot 10) = 16$, a forgatások csoportjánál pedig $\frac{1}{4}(84 + 2 \cdot 0 + 4) = 22$. Tehát a lényegesen különböző színezések száma a két esetben 16, illetve 22.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy egy $S_3 \rtimes C_5$ szorzat csak direkt szorzat lehet! (Útmutatás: hogyan hathat a C_5 generátorelemével való konjugálás S_3-on?)*

Hf2. *Hányféleképpen lehet egy 4×4-es kis négyzetből álló négyzetben négy mezőt beszínezni, ha az elforgatással vagy tükrözéssel egymásba vihető színezéseket azonosnak tekintjük?*