1. *Bizonyítsuk be, hogy egy kocka egybevágóságainak csoportja izomorf $S_4 \times C_2$-vel!*

Megoldás: Legyen G az egybevágósági csoport. Láttuk a 4/6. feladatban, hogy $|G| = 48$. Tekintsük G hatását a 4 testátlón: $\varphi : G \to S_4$. Ez egy S_4-be menő homomorfizmus, amelynek magja csak az egységelemből és a középpontos tükrözésből áll, ha ugyanis egy egybevágóság helyben hagyja az összes testátlót, akkor legföljebb a testátló két csúcsát cserélheti meg. De ha az egyik csúcsot helyben hagyja, akkor annak az élszomszédait az élszomszédokba viszi, tehát a többi testátlót sem fordíthatja meg. Ha pedig az egyiket megfordítja, akkor ugyanezért a többit is megfordítja. Legyen Z ez a kételemű mag. Ez nyilván normálosztó, sőt centrális, mert egy kételemű normálosztó szükségképpen centrális. Mivel $\operatorname{Im}\varphi \cong G/\operatorname{Ker}\varphi$ 24-elemű, φ szürjektív, és így $G/Z \cong S_4$.

Másrészt vehetjük G-nek azt a $\{\pm 1\}$ csoportba menő leképezését amely az irányítástartó egybevágóságokat 1-be, az irányításváltókat -1-be viszi. Ennek az N magja 24-elemű, és diszjunkt Z-től. A rendek miatt $G = N \times Z$, s mivel $S_4 \cong G/Z = (N \times Z)/Z \cong N$, azt kaptuk, hogy $G \cong S_4 \times C_2$.

2. *Keressünk minimális fokú tranzitív, ill. nem feltétlenül tranzitív hűséges permutációreprezentációt a következő csoportokhoz!*

a) C_{10} *b)* D_6 *c)* $\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle \cong C_5 \rtimes C_4$, *ahol* $a^b = a^2$

Megoldás: a) A legkisebb olyan n-et kell megkeresnünk, amelyre S_n-ben van 10-edrendű elem. Ennek a ciklusfelbontásában vagy van 10-edrendű, vagy van egy másod- és egy ötödrendű ciklus, így $n \geq 7$, és S_7-ben $\langle (12345)(67) \rangle \cong C_{10}$. Ez a hatás nem tranzitív: egy tranzitív ciklikus csoport generátora csak egyetlen ciklusból állhat, tehát ha ez a csoport 10-edrendű, akkor a generátor egy 10-ciklus. Így nem tranzitívra 7, tranzitívra 10 a csoporthatás minimális foka.

b) S_4-ben nincs hatodrendű elem (ahhoz $n \geq 3 + 2 = 5$ kellene), így $n \geq 5$. S_5-ben van hatodrendű elem, pl. $a = (123)(45)$, és ehhez az $b = (13)$ olyan másodrendű (diszjunkt részcsoportot generáló) elem, amivel való konjugálás invertálja a-t, tehát D_6-tal izomorf csoportot generálnak. Ez a hatás azonban nem tranzitív ($\{1, 2, 3\}$ és $\{4, 5\}$ az orbitjai). Nem is létezhet S_5-be menő tranzitív csoporthatása, mert S_n minden tranzitív részcsoportjának a rendje osztható n-nel. D_6 természetes módon megjelenik az S_6-ban (a szabályos hatszög csúcsain való hatással), és ez tranzitív hatás. Tehát nem tranzitívra $n = 5$, tranzitívra $n = 6$ a minimum.

c) Mivel S_n-ben kell egy ötödrendű elemnek lennie, $n \geq 5$. Másrészt $H = \langle b \rangle$ nem tartalmaz normálosztót ($a^{-1}b^2a = b^2b^{-2}a^{-1}b^2a = b^2(b^{-2}ab^2)^{-1}a = b^2(a^4)^{-1}a = b^2a^2 \notin \langle b \rangle$), ezért a H mellékosztályain való hatás hűséges, tranzitív csoporthatás. Így $n = 5$ a válasz mindkét részfeladatra. (Konkrétabban, $a \mapsto (12345)$ és $b \mapsto (2354)$ hűséges, tranzitív csoporthatás.)

3. *Bizonyítsuk be, hogy ha $G \leq S_n$ $(n \geq 5)$, és $|S_n : G| < n$, akkor $G = A_n$ vagy S_n.*

Megoldás: Legyen $|S_n : G| = k < n$, és legyen $\varphi : S_n \to S_k$ a G mellékosztályain való hatás. A φ magja normálosztója S_n-nek és $k < n$ miatt nemtriviális, ezért csak A_n vagy S_n lehet. Másrészt viszont a G mellékosztályain való hatás magja G-ben van, így $A_n \leq G$, tehát $G = A_n$ vagy $G = S_n$.

4. *Tekintsük az S_5 hatását a konjugálással az 5-Sylowjain! Bizonyítsuk be, hogy ez az S_5-nek* *olyan beágyazását adja S_6-ba, ahol S_5 képének harmadrendű elemei fixpontmentesek. Tehát S_6-nak van 6 indexű részcsoportja a stabilizátorokon kívül.*

Megoldás: $|Syl_5(S_5)| = 6$, mert 5-tel osztva 1 maradékot ad, osztója 24-nek, és nyilván nem 1. Így az 5-Sylowokon a konjugálással való hatás valóban S_6-ba képez. Harmadrendű elem nem lehet egy 5-Sylow normalizátorában, mert a normalizátor elemszáma $120 : 6 = 20$, így a harmadrendű elemek fixpontmentesen hatnak az 5-Sylowokon. Végül a hatás hűséges, mert S_5-nek csak S_5 és A_5 a nem triviális normálosztói, és ezek tartalmaznak harmadrendű elemet, tehát nem normalizálhatnak 5-Sylowot.

5. *Bizonyítsuk be, hogy*
a) ha $|G| = pq$ vagy $|G| = p^2q$ valamely p, q prímekre, akkor G feloldható;
b) minden 270-elemű csoport feloldható.

Megoldás: a) Tudjuk, hogy minden prímhatványrendű csoport nilpotens, ezért feloldható is, így feltehető, hogy $p \neq q$.

Legyen $|G| = pq$, ahol $p > q$. Ekkor $|Syl_p(G)| \equiv 1 \pmod p$, és $|Syl_p(G)| \mid q$ miatt $|Syl_p(G)| = 1 \Rightarrow$ a p-Sylow normálosztó, és faktora q-adrendű, így a p-Sylow és a faktora is feloldható, és akkor G is.

Legyen $|G| = p^2q$. Ha $p > q$, akkor az előbbi esettel megegyező módon bizonyíthatjuk, hogy a p-Sylow normálosztó, és így G feloldható. Ha viszont $q > p$, és $Q \in Syl_q(G)$, akkor $|Syl_q(G)| \equiv 1 \pmod q$ és $|Syl_q(G)| \mid p^2$ miatt $|Syl_q(G)|$ csak 1 vagy p^2 lehet. Az első esetben a q-Sylow normálosztó, a másodikban a q-adrendű elemek száma G-ben $p^2(q-1) = p^2q - p^2$ (mert a q-Sylowok prímrendűek, így páronként diszjunktak), így a p-Sylowok mind a maradék p^2-elemű halmazban vannak, és ebbe csak egy p-Sylow fér, ezért a p-Sylow lesz normálosztó. Mindkét esetben azt kapjuk, hogy G egy p-csoport és egy q-csoport bővítése, tehát feloldható.

b) Legyen $|G| = 270 = 2 \cdot 5 \cdot 3^3$. Ekkor $|Syl_5(G)| \equiv 1 \pmod 5$ és $|Syl_5(G)| \mid 2 \cdot 3^3$ azt adja, hogy $|Syl_5(G)| = 1$ vagy 6. Az első esetben az 5-Sylow normálosztó, és a faktorában a 3-Sylow 2 indexű, így szintén normálosztó, tehát G feloldható.

Tegyük fel most, hogy $|Syl_5(G)| = 6$, azaz $P_5 \in Syl_5(G)$-re $|N_G(P_5)| = 45$. Mivel $|\operatorname{Aut}(C_5)| = 4$, egy háromhatványrendű elem csak úgy normalizálhatja P_5-öt, hogy egyúttal centralizálja is. Tehát ha P az $N_G(P_5)$ 3-Sylowja, akkor $P_5 \leq C_G(P) \leq N_G(P)$. Viszont az 1. Sylow-tétel szerint P belefoglalható G-nek egy 3-Sylowjába, P_3-ba. De P ekkor maximális részcsoportja P_3-nak (mivel $|P| = 9$), így a nilpotens részcsoportok jellemzéséből tudjuk, hogy $P \lhd P_3$, azaz $P_3 \leq N_G(P)$ is teljesül. Tehát $|N_G(P)| = 5 \cdot 27$ vagy $10 \cdot 27$.

Az első esetben $|G : N_G(P)| = 2 \Rightarrow N_G(P) \lhd G$, és $N_G(P)$-ben a 3-Sylow normálosztó, mert 5 indexű, és $5 \not\equiv 1 \pmod 3$, így $N_G(P)$ feloldható, és akkor G is az.

A második esetben $P \lhd G$, és $|G/P| = 30$, tehát már csak a 30-adrendű csoportokról kell belátni, hogy feloldhatók. Az utóbbiban viszont, ha sem a 3-Sylow, sem az 5-Sylow nem normálosztó, akkor van legalább $6 \cdot 4 = 24$ ötödrendű és legalább $4 \cdot 2 = 8$ harmadrendű elem, ami ellentmondás. Tehát G/P és a 9-edrendű P csoport is feloldható, így G is az.

6. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy 60-adrendű csoportban van 15-ödrendű elem, akkor az 5-Sylow normálosztó G-ben. Hány 15-ödrendű elem lehet a csoportban? Adjunk példát is mindegyik esetre!*

Megoldás: Legyen $o(g) = 15$, és $P_5 = \langle g^3 \rangle$. Ekkor $P_5 \in Syl_5(G)$, és $g \in N_G(P_5)$. Így $|Syl_5(G)| = |G : N_G(P_5)| \mid 4$, viszont 5-tel osztva 1 maradékot ad, tehát $|Syl_5(G)| = 1$, azaz $P_5 \lhd G$.

Bármely harmadrendű h elem a P_5-tel együtt 15-ödrendű részcsoportot generál: $|\langle h, P_5 \rangle| = |\langle h \rangle P_5| = \frac{|\langle h \rangle| \cdot |P_5|}{|\langle h \rangle \cap P_5|} = 15$, és 15-ödrendű csoportban 3- és 5-Sylowból is csak egy lehet, tehát ez a csoport $\cong C_3 \times C_5 \cong C_{15}$. Ebben a csoportban egyetlen harmadrendű részcsoport van, ezért a G különböző 3-Sylowjai különböző 15-ödrendű ciklikus csoportot generálnak P_5-tel (és persze minden 15-ödrendű ciklikusban benne van G egy 3-Sylowja), tehát a 15-ödrendű ciklikus részcsoportok száma $|Syl_3(G)|$, és a 15-ödrendű elemeké ennek $\varphi(15) = 2 \cdot 4 = 8$-szorosa (a C_{15} generátorelemei). $|Syl_3(G)| \equiv 1 \pmod 3$, és $|Syl_3(G)| \mid 20$, tehát $|Syl_3(G)| = 1$, 4 vagy 10, és így a 15-ödrendű elemek száma 8, 32 vagy 40. Az elsőre példa a C_{60} ciklikus csoport, a másodikra $A_4 \times C_5$, az utolsó eset viszont nem lehetséges, mert ott a 10 darab 3-Sylow is lefedne még 21 elemet, és ez együtt már több, mint a G elemszáma. Tehát egy 60-adrendű csoportban 0, 8 vagy 32 darab 15-ödrendű elem lehet.

Legyen $\Omega^{(k)} = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Omega$ különbözők$\}$. Egy Ω-n ható permutációcsoport vagy csoporthatás k-tranzitív, ha tranzitív az $\Omega^{(k)}$ halmazon.

7. *Lássuk be, hogy $|\Omega| \geq k$-ra $G \leq S_\Omega$ akkor és csak akkor k-tranzitív, ha G tranzitív, és G_α $(k-1)$-tranzitív az $\Omega \setminus \{\alpha\}$-n valamely/bármely $\alpha \in \Omega$-ra!*

Megoldás: Tegyük fel, hogy G k-tranzitív. Ekkor nyilván tranzitív is (az előírt $\alpha \mapsto \beta$ megfeleltetést kiegészíthetjük tetszőlegesen két k-as közötti megfeleltetéssé), és G_α $(k-1)$-tranzitív tetszőleges α-ra, mert egy $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ k-ast át lehet vinni egy $(\alpha, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ k-asba, ha $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ és $\{\beta_2, \ldots, \beta_k\}$ $(k-1)$-elemű részhalmazok $\Omega \setminus \{\alpha\}$-ban.

Most tegyük fel, hogy G tranzitív, és G_α $(k-1)$-tranzitív valamely α-ra, továbbá legyenek $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ és $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ k-elemű részhalmazok Ω-ban. A tranzitivitás miatt van olyan $g, h \in G$, hogy $g : \alpha_1 \mapsto \alpha$ és $h : \alpha \mapsto \beta_1$, továbbá G_α $(k-1)$-tranzitivitása miatt van olyan $x \in G_\alpha$, amelyre $\alpha_i g x = \beta_i h^{-1}$ $\forall i \in \{2, \ldots, k\}$. Így $\alpha_1(gxh) = \alpha x h = \alpha h = \beta_1$, és $\alpha_i(gxh) = (\alpha_i g)xh = (\beta_i h^{-1})h = \beta_i$ $\forall i \in \{2, \ldots, k\}$.

8. *Milyen k-ra k-tranzitív S_n és A_n?*

Megoldás: S_n nyilván n-tranzitív (és így persze k-tranzitív is minden $k \leq n$-re). A_n $(n-2)$-tranzitív (és akkor persze k-tranzitív is minden $k \leq n-2$-re), ugyanis tetszőleges $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2})$ és $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \in \Omega^{(n-2)}$-re a $\{\gamma, \delta\} = \Omega \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}\}$ és $\{\gamma', \delta'\} = \Omega \setminus \{\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ választással vagy a $g : \alpha_i \mapsto \beta_i$ $(1 \leq i \leq n-2)$, $\gamma \mapsto \gamma'$, $\delta \mapsto \delta'$ permutáció vagy $h := g \cdot (\gamma' \delta')$ páros. $(n-1)$-tranzitív már nem lehet, mert ahhoz legalább $n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 = n!$ elem kellene.

9. *Milyen n és q esetén lehet a $V = \mathbb{F}_q^n$ vektortér $AGL(V)$ affin csoportja k-tranzitív valamely $k > 2$-re?*

Megoldás: Legyen $G = AGL(V) = \{x \mapsto Ax + b \mid A \in GL(V),\ b \in V\}$, ahol $\dim_K V = n$. G tranzitív, mert tetszőleges $a, b \in V$-re $a \mapsto aI + (b - a) = b$. A 0 vektor stabilizátora $G_0 = GL(V)$. G_0 tranzitív $V \setminus \{0\}$-n, ugyanis tetszőleges $a, b \neq 0$ vektorokat ki lehet egészíteni egy-egy bázissá, és van olyan invertálható transzformáció, ami az egyik bázist a másikba viszi. Így G mindig 2-tranzitív.

G_0 nem lehet 2-tranzitív, ha $n > 1$ és $|K| > 2$, mert akkor $u, v \in V$ független vektorokra, és $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$ skalárra az $(u, \lambda u)$ összefüggő párt nem tudjuk az (u, v) független párba képezni lineáris transzformációval.

Ha $n = 1$ és $|K| > 3$, akkor sem lehet G_0 2-tranzitív, mert akkor van $\lambda \neq \mu \in K \setminus \{0, 1\}$, és egy $0 \neq v \in V$ vektorra a $(v, \lambda v)$ párt nem képezhetjük a $(v, \mu v)$ párba.

Ha $n = 1$ és $|K| = 3$, akkor $|V| = |K| = 3$, és G 3-tranzitív, mert $GL(V)$ 2-tranzitív $((1, -1) \xmapsto{\cdot 1} (1, -1)$ és $(1, -1) \xmapsto{\cdot(-1)} (-1, 1))$.

Ha $|K| = 2$, és $n \geq 2$, akkor G_0 2-tranzitív, mert minden $u \neq v$ nem nulla vektor független is, és egy (u_1, u_2) független vektorpárt át lehet vinni egy tetszőleges (v_1, v_2) független vektorpárba úgy, hogy mindegyiket tetszőlegesen kiegészítjük bázissá. Tehát ilyenkor G 3-tranzitív. Viszont ha $n > 2$, akkor G_0 3-tranzitív már nem lehet, mert $u, v, w \in V$ független vektorokra az $(u, v, u+v)$ összefüggő vektorhármast nem képezhetjük az (u, v, w) független vektorhármasba.

Végül ha $|K| = 2$ és $n = 2$, akkor $|V| = 4$, és ezen G 4-tranzitívan hat, mert tetszőleges, 3 különböző nemnulla vektorból álló (u_1, u_2, u_3) és (v_1, v_2, v_3) vektorhármasra $u_3 = u_1 + u_2$ és $v_3 = v_1 + v_2$, tehát az $A : u_1 \mapsto v_1$, $u_2 \mapsto v_2$ invertálható transzformációra $A : u_3 \mapsto v_3$.

Összefoglalva: G 4-tranzitív, ha $n = 2$ és $|K| = 2$,
3-tranzitív (de nem 4-tranzitív), ha $n = 1$ és $|K| = 3$ vagy $n \geq 3$ és $|K| = 2$,
és minden más esetben csak 2-tranzitív.

Hf1. *Legyen G_k $(k = 1, 3, 5, 7)$ a $\langle a \rangle \cong C_8$ és $\langle b \rangle \cong C_2$ csoportok szemidirekt szorzata, ahol $b^{-1}ab = a^k$. Hány másod-, negyed-, illetve nyolcadrendű elem van az egyes csoportokban?*

Hf2. *A megfelelő Sylow-tétel bizonyításához hasonló módon lássuk be, hogy egy véges G csoportban tetszőleges $p^k \mid |G|$ prímhatványra a p^k-rendű részcsoportok száma $\equiv 1 \pmod p$! (A létezést is indokoljuk!)*