1. *a) Bizonyítsuk be, hogy az S_n-nek az A_n-be eső konjugáltosztályai vagy egyetlen konjugáltosztályt alkotnak A_n szerint is, vagy két, azonos méretű konjugáltosztályra esnek szét!*

b) Bizonyítsuk be, hogy egy konjugáltosztály pontosan akkor esik szét A_n-ben, ha az elemei ciklusfelbontásában nincs páros hosszúságú ciklus, és a páratlan ciklushosszak mindegyikéből (beleértve az 1-ciklusokat) legföljebb 1 van!

Megoldás: a) Ha $g \in A_n$, akkor $|\mathcal{K}_{A_n}(g)| = |A_n|/|C_{A_n}(g)| = |A_n|/|A_n \cap C_{S_n}(g)| = |A_nC_{S_n}(g)|/|C_{S_n}(g)|$, míg $|\mathcal{K}_{S_n}(g)| = |S_n|/|C_{S_n}(g)|$. Ha $C_{S_n}(g) \leq A_n$, akkor $|\mathcal{K}_{A_n}(g)| = |A_n|/|C_{S_n}(g)|$ fele a $|\mathcal{K}_{S_n}(g)|$-nek. Ha viszont $C_{S_n}(g) \not\leq A_n$, akkor $A_nC_{S_n}(g) = S_n$, mivel A_n maximális részcsoport S_n-ben, így ebben az esetben a g A_n szerinti konjugáltosztálya a teljes S_n szerinti konjugáltosztály.

b) Ha $g \in A_n$ ciklusfelbontásában van páros hosszúságú ciklus, akkor ez benne van g centralizátorában, és páratlan permutáció, így ekkor $C_{S_n}(g) \not\leq A_n$. Ha van benne két azonos hosszúságú páratlan ciklus: $(a_1 \dots a_k)(b_1 \dots b_k)$, akkor $(a_1b_1)(a_2b_2)\cdots(a_kb_k)$ páratlan permutáció, és benne van $C_{S_n}(g)$-ben. Tehát ebben az esetben is egyben marad a konjugáltosztály. Ha viszont csupa különböző hosszúságú ciklusból áll a g permutáció, akkor a centralizátorában csak olyan permutációk vannak, amelyek ezeket a ciklusokat forgatják el, azaz a centralizátort generálják ezek a ciklusok, s mivel ezek mind páros permutációk, $C_{S_n}(g) \leq A_n$, amiből az a) rész szerint az következik, hogy g konjugáltosztálya két részre esik szét A_n-ben.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha $G = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, és $H \leq G$-re $|G : H| = k$, akkor H-nak van $\leq (n-1)k + 1$ elemű generátorrendszere!*

Megoldás: Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai a H mellékosztályai, és egy mellékosztályból megy egy x_i-vel címkézett él egy másikba, ha az x_i-vel való jobbszorzás az elsőt a másodikba képezi. Ez a gráf összefüggő, mert $\{ x_1, \dots, x_n \}$ generátorrendszere G-nek. Vegyük a gráfnak egy feszítőfáját, és jelöljük ki úgy a mellékosztályok reprezentánsait, hogy kiindulunk a H-ból mint gyökérből, és ott az 1-et választjuk, aztán minden csúcsból a gyökérhez közelebbi szomszédjának a megfelelő x_i- vagy x_i^{-1}-szeresét. Így a H generátorrendszerének a konstrukciójánál a kn elem közül legalább $k-1$ darab 1 lesz: amikor egy reprezentánselemet a feszítőfába beválasztott élhez tartozó generátorelemmel szorzunk. Tehát legföljebb $kn - (k-1)$ darab 1-től különböző generátorelemet kapunk.

3. *Keressünk az $F(x, y)$ szabad csoportban 2 indexű részcsoportot (használjuk hozzá a C_2 egy prezentációját), és lássuk be, hogy ennek a csoportnak van 3 elemű szabad generátorrendszere!*

Megoldás: A $G = \langle x, y \,|\, x^2 = 1,\ y^2 = 1, xy = 1 \rangle$ relációkkal generált csoportnak a Dyck-tétel szerint homomorf képe a $C_2 = \langle a \rangle$, ugyanis az $x = y = a$ helyettesítéssel teljesülnek C_2-ben a relációk. Másrészt $G = \langle x \rangle$, mivel $y = x^{-1}$, és $o(x) \leq 2$, tehát $|G| \leq 2$, ezért a C_2-re menő homomorfizmus izomorfizmus. Ezzel beláttuk, hogy $F(x, y)$-ban az x^2, y^2, xy által generált normálosztó 2 indexű. Lássuk be, hogy a generált normálosztó maga a generált részcsoport, $H = \langle x^2, y^2, xy \rangle$. Vegyük észre, hogy $yx = y^2(xy)^{-1}x^2 \in H$, és így

$$x^{-1}x^2x = x^2 \in H,\ x^{-1}y^2x = x^{-2}(xy)(yx) \in H,\ x^{-1}(xy)x = yx \in H,$$

$$y^{-1}x^2y = (xy)^{-1}x^2(xy) \in H,\ y^{-1}y^2y = y^2 \in H,\ y^{-1}(xy)y = (xy)^{-1}x^2y^2 \in H.$$

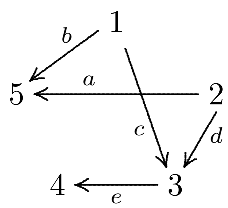
Ebből következik, hogy $x, y \in N_G(H)$, tehát $G = \langle x, y\rangle \leq N_G(H)$, azaz $H \lhd G$, és így H maga a 2 indexű normálosztó.

Azt kell még megmutatnunk, hogy $u = x^2$, $v = y^2$ és $w = xy$ szabadon generálják a H csoportot, azaz egy u, v, w-ben redukált, nem triviális szó az $F(x, y)$-beli redukálás után sem válik triviálissá. Ezt az u, v, w-beli redukált szó hosszára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Az alábbi szorzástáblázat mutatja, hogy ha egy redukált $\{u, v, w\}$-szót redukálunk $F(x, y)$-ban, majd megszorzunk egy olyan $\{u, v, w\}$-jellel, amivel az eredeti szó redukált maradna, és megint redukálunk $F(x, y)$-ban, akkor hogyan változik ez a szó. Az indukciós lépésben benne van az is, hogy mire kell végződnie a redukált alaknak.

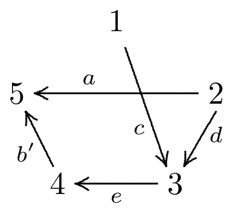
$\{u, v, w\}$-szó	red. $\{x, y\}$-ban	x^2	x^{-2}	y^2	y^{-2}	xy	$y^{-1}x^{-1}$
$\dots u$	$\dots x^2$ $\dots yx$ $\dots y^{-1}x$	$\dots x^2$	–	$\dots y^2$	$\dots y^{-2}$	$\dots xy$	$\dots y^{-1}x^{-1}$
$\dots u^{-1}$	$\dots x^{-2}$	–	$\dots x^{-2}$	$\dots y^2$	$\dots y^{-2}$	$\dots x^{-1}y$	$\dots y^{-1}x^{-1}$
$\dots v$	$\dots y^2$	x^2	$\dots x^{-2}$	$\dots y^2$	–	$\dots xy$	$\dots yx^{-1}$
$\dots v^{-1}$	$\dots y^{-2}$ $\dots xy^{-1}$ $\dots x^{-1}y^{-1}$	$\dots x^2$	$\dots x^{-2}$	–	$\dots y^{-2}$	$\dots xy$	$\dots y^{-1}x^{-1}$
$\dots w$	$\dots xy$ $\dots x^{-1}y$	$\dots x^2$	$\dots x^{-2}$	$\dots y^2$	$\dots xy^{-1}$ $\dots x^{-1}y^{-1}$	$\dots xy$	–
$\dots w^{-1}$	$\dots y^{-1}x^{-1}$ $\dots yx^{-1}$	$\dots y^{-1}x$ $\dots yx$	$\dots x^{-2}$	$\dots y^2$	$\dots y^{-2}$	–	$\dots y^{-1}x^{-1}$

4. *Használjunk Jerrum-szűrőt a $G = \langle(25), (1543), (13), (235), (345)\rangle \leq S_5$ csoport generátorrendszerének redukálásához!*

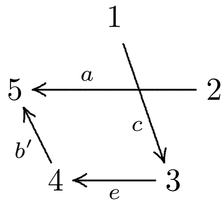
Megoldás: Használjuk az $a = (25)$, $b = (1543)$, $c = (13)$, $d = (235)$, $e = (345)$ jelölést a generátorelemekre. Az alábbi gráfban a generátorelemekhez tartozó nyilak a permutáció legkisebb mozgatott eleméből annak a képéhez vezetnek.



A gráfban van kör: $1 \xrightarrow{b} 5 \xleftarrow{a} 2 \xrightarrow{d} 3 \xleftarrow{c} 1$, amelynek 1 a legkisebb csúcsa, ezért a b generátorelemet lecseréljük a kört alkotó (a legkisebb csúcsból b-vel induló) $b' = ba^{-1}dc^{-1} = (45)$ permutációra. Az új gráf:



Ebben is van kör: $2 \xrightarrow{d} 3 \xrightarrow{e} 4 \xrightarrow{b'} 5 \xleftarrow{a} 2$. Cseréljük le d-t a $d' = deb'a^{-1} = 1$ elemre. De ez elhagyható, így az új gráf:



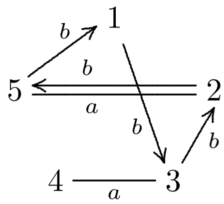
és ez már körmentes. Tehát a redukált generátorrendszer:

$$\{\, a, b', c, e \,\} = \{(25), (45), (13), (345)\,\}.$$

Ellenőrzésképpen állítsuk elő a régi generátorelemeket az újakból: $d = a(b')^{-1}e^{-1}$ és $b = b'cd^{-1}a = b'ceb'a^{-1}a = b'ceb'$.

5. *Határozzuk meg S_5-ben a $G = \langle (25)(34), (1325) \rangle$ részcsoport elemszámát a Schreier–Sims-algoritmussal!*

Megoldás: Kezdjük azzal, hogy felrajzoljuk a szimmetrikus csoport alaphalmazán a generátorelemek hatását. (Ez nem ugyanaz a gráf, mint a Jerrum-szűrőnél, itt minden elem képét berajzoljuk!)



Látható, hogy a gráfnak egyetlen komponense van, tehát a G csoport tranzitív, és ezért $|G : G_1| = 5$, ahol G_1 az 1 pont stabilizátora. Állítsuk elő a G_1 generátorrendszerét! A gráf segítségével válasszunk egy reprezentánsrendszert a G_1 mellékosztályaihoz: minden i-hez egy 1-et i-be vivő permutációt: $1 : 1 \mapsto 1$, $b^2 = (12)(35) : 1 \mapsto 2$, $b = (1325) : 1 \mapsto 3$, $ba = (1435) : 1 \mapsto 4$ és $b^{-1} = (1523) : 1 \mapsto 5$. Ekkor G_1-et generálják a következő elemek: $1a1^{-1} = a = (25)(34)$, $1bb^{-1} = 1$, $b^2a(b^{-1})^{-1} = b^2ab = (2354)$, $b^2b(b^{-1})^{-1} = 1$, $ba(ba)^{-1} = 1$, $bb(b^2)^{-1} = 1$, $ba^2b^{-1} = 1$, $bab(ba)^{-1} = (5423)$, $b^{-1}ab^{-2} = (2453)$ és $b^{-1}b1^{-1} = 1$. (Azt, hogy a reprezentánselemeket az egyes generátorelemekkel megszorozva melyik mellékosztályba jutunk, azaz melyik reprezentánselem inverzével kell beszorozni, szintén könnyen leolvashatjuk a gráfról: csak azt kell megnézni, hogy az 1 hova jut.) Az 1-eket és az egybeeséseket elhagyva $G_1 = \langle (25)(34), (2354), (2453) \rangle$, s mivel mindegyik generátorelem hatványa a (2354)-nek, $G_1 = \langle (2354) \rangle$ 4-edrendű, és így $|G| = 5 \cdot 4 = 20$.

6. *Oldjuk meg a következő diofantoszi egyenletrendszert!*

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3x & - & y & & & = & 1 \end{array}$$

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{sor} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{sor} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{sor}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 & | & -3 \\ 0 & 8 & 9 & | & 10 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 8 & 9 & | & 10 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 8 & 1 & | & 10 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & 8 & | & 10 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 10 \end{bmatrix}$$

Ebből leolvasható, hogy a megoldás az új változókra $x' = -3$, $y' = 10$ és $z' = t \in \mathbb{Z}$ tetszőleges. Az eredeti változókra megkapjuk a megoldást, ha az oszlopműveletekhez tartozó Q mátrixszal megszorozzuk az $(x', y', z')^T$ vektort. A Q mátrixot megkaphatjuk, ha az I-re is végrehajtjuk ugyanazokat az oszlopműveleteket, mint amelyeket az egyenletrendszer mátrixán végeztünk.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszl.}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszl.}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszl.}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{oszl.}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} = Q$$

Ebből a megoldás

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+3t \\ -10+9t \\ 10-8t \end{bmatrix}.$$

7. *Adjuk meg a következő Abel-csoportok generátorokkal megadott részcsoportjának és a részcsoporttal vett faktorcsoportnak a kanonikus alakját!*
a) $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus \langle c \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, *és* $H = \langle 2a - 2b + 3c,\ 4b - 3c \rangle$
b) $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus \langle c \rangle \cong \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, *és* $H = \langle 4a - c,\ b + c \rangle$.

Megoldás: a) Írjuk fel egy mátrix soraiba a részcsoportgenerátorelemeinek koordinátáit a szabad Abel-csoport megadott bázisa szerint, és hozzuk a mátrixot Smith-normálalakra. A sorműveletek a részcsoport generátorrendszerét változtatják, az oszlopműveletek a bázist cserélik le egy másik bázisra. Így a részcsoport komponensei a nagy csoport komponenseinek részcsoportjai lesznek, és faktorizálni is komponensenként lehet.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \overset{sor}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát $H = \langle a' \rangle \oplus \langle 2b' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, és $G/H = \langle a' \rangle \oplus \langle b' \rangle \oplus \langle c' \rangle \,/\, \langle a' \rangle \oplus \langle 2b' \rangle \oplus 0 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$.

b) Tekintsük az $F = \langle x \rangle \oplus \langle y \rangle \oplus \langle z \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ szabad Abel-csoportból menő $\varphi : F \to G$ homomorfizmust, amelyre $x\varphi = a$, $y\varphi = b$ és $z\varphi = c$. Ekkor $K := \operatorname{Ker} \varphi = \langle 16x, 2y, 4z \rangle$, és H ősképe φ-nél $\tilde{H} = \langle 4x - z,\ y + z,\ 16x,\ 2y,\ 4z \rangle$. A $G/H \cong F/\tilde{H}$ és $H \cong \tilde{H}/K$ csoportokat kell meghatározni. Az elsőt az a) rész módszerével csináljuk, közben megjegyezve a K generátorelemeinek átkoordinátázását is. Ezután a $\tilde{H}$

bázisában ($\tilde{H}$ is szabad Abel-csoport, mivel egy szabad Abel-csoport részcsoportja) fejezzük ki a K generátorelemeit, és így határozzuk meg a $\tilde{H}/K$ faktorcsoportot.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 16 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{oszlop} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{sor} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{sor} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{oszlop}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{sor} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebből leolvasható, hogy $G/H \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus 8\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_8$. Másrészt az oszlopműveletek hatása a K generátorain:

$$\begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{oszlop} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{oszlop} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Tehát a $\tilde{H}$ $\{\, x', y', 8z' \,\}$ báziselemeivel felírva:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{sor} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{oszlop} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{sor} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{sor}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{oszlop} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{oszlop}$$

Tehát $H \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \oplus 4\mathbb{Z} \oplus 4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$.