Szabad struktúrák

Def. $(A,\mathcal{F})$ *(univerzális) algebra*: $A \neq \emptyset$ halmaz, $\mathcal{F}$ műveletek halmaza (lehet végtelen)
$B \subseteq A$ *részalgebra*, ha nem üres, és zárt a műveletekre (jele $B \leq A$)
$\varphi : (A,\mathcal{F}) \to (B,\mathcal{F})$ *homomorfizmus*, ha $A \to B$, és művelettartó:
$(f(a_1,\dots,a_n))\varphi = f(a_1\varphi,\dots,a_n\varphi)\ \forall f \in \mathcal{F},\ a_1,\dots,a_n \in A$.
F művelethalmazú algebrák egy *varietása*: azonosságok által definiált osztály

Pl. Félcsoport: $(A,\cdot)$, axiómák: $(xy)z = x(yz)$

Csoport: $(A,\cdot,1,^{-1})$, axiómák $\begin{cases} (xy)z = x(yz) \\ a1 = a, \quad 1a = a \\ aa^{-1} = 1,\ a^{-1}a = 1 \end{cases}$

Vektortér K test fölött: $(A,+,0,\{\,\lambda\,\cdot \mid \lambda \in K\,\})$,
a nem azonossággal megadott, additív inverzet biztosító axiómát kiválthatja a $0 \cdot x = 0$ azonosság.

Nyilván: Minden varietás zárt a homomorf képre, részalgebrára, direkt szorzatra (ez a Descartes-szorzat a pontonkénti művelettel), azaz HSP-zárt.

Megj. Fordítva is igaz: azonos művelethalmazú algebrák HSP-zárt osztálya mindig varietás.

Pl. A testek nem alkotnak varietást: az invertálás nem vehető be műveletnek, mert nincs minden elemen értelmezve, és az inverz létezésének feltétele így nem azonosság. Másképp: testek direkt szorzata nem test, még csak nem is nullosztómentes.

Def. $\mathcal{V}$ varietás, $A \in \mathcal{V}$, $X \subseteq A$.
A az X *által generált szabad algebra* $\mathcal{V}$-ben, ha $\forall B \in \mathcal{V}$, $\forall \varphi_0 : X \to B$ leképezésre
$\exists!\ \varphi : A \to B$ homomorfizmus, hogy $\varphi|_X = \varphi_0$.
Ekkor X az A *szabad generátorrendszere.*
A *szabad algebra* $\mathcal{V}$-ben, ha van szabad generátorrendszere.

Megj. $\mathcal{V}$-ben az adott számosságú halmaz által generált szabad algebrák izomorfak, ugyanis a generáló halmazok közötti bijekció kiterjeszthető homomorfizmussá mindkét irányban, és a két homomorfizmus kompozíciója a kiterjesztés egyértelműsége miatt csak az identikus homomorfizmus lehet.

Pl. 1. Szabad csoport:
az X elemeiből alkotott $x_1^{\pm 1} \cdots x_k^{\pm 1}$ redukált szavak ($\nexists$ benne $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$), ahol 1 az üres szó, a szorzás az egymás után írás, $1u = u1 = u$, $x^\varepsilon x^{-\varepsilon} = 1$ egyszerűsítésekkel, és $(x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_k^{\varepsilon_k})^{-1} = x_k^{-\varepsilon_k} \cdots x_1^{-\varepsilon_1}$.
2. Szabad vektorterek:
minden vektortér, ugyanis egy bázison tetszőlegesen előírhatunk egy homomorfizmust, tehát a bázis szabad generátorrendszer.

Def. R 1-elemes gyűrű fölötti *bal modulus*:
$M = {}_RM = (M,+,0,\{\,r\,\cdot \mid r \in R\,\})$ a következő azonosságokkal:

$$\begin{array}{rclcrcl} (x+y)+z &=& (x+(y+z) & \qquad & r(x+y) &=& rx+ry \\ x+y &=& y+x & & (r+s)x &=& rx+sx \\ x+0 &=& x & & (rs)x &=& r(sx) \\ 0\cdot x &=& 0 & & 1x &=& x \end{array}$$

Pl. A vektorterek K test fölötti modulusok.
Az Abel-csoportok (additív írásmóddal) tekinthetők $\mathbb{Z}$-modulusoknak, mert n pozitív egészre az $na := a + \ldots + a$ (n tagú összeg), $0a = 0$, $(-n)a = -(na)$ jelölés természetes módon megad egy $\mathbb{Z}$-modulusstruktúrát.

Tétel. A szabad modulusok a $\bigoplus\limits_{i\in I} {}_R R$ direkt összegek.

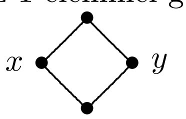
Jelölés: ${}_R R$ az R mint sajátmaga fölötti balmodulus,
$\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \leq \prod\limits_{i\in I} M_i$ azokból az elemekből áll, amelyeknek csak véges sok komponense nem 0).

Biz. Az $F := \bigoplus\limits_{i\in I} {}_R R$ modulusban azok az $x_i = (\ldots, 0, 0, 1, 0, \ldots)$ elemek, amelyekben csak az i. helyen van 1, a többi helyen 0 nyilván generátorrendszert alkotnak, sőt *bázist*: F minden eleme egyértelműen írható $\sum\limits_{i\in I} r_i x_i$ alakban (ahol csak véges sok r_i nem nulla).
Így $X = \{\, x_i \,|\, i \in X \,\}$ szabad generátorrendszer: egy $\varphi_0 : X \to M$, $x_i\varphi_0 = m_i$ leképezés kiterjesztése $\left(\sum\limits_{i\in I} r_i x_i\right)\varphi := \sum\limits_{i\in I} r_i m_i$ az egyértelmű felírás miatt jól definiált és művelettartó, s mivel X generátorrendszer, a kiterjesztés egyértelmű. $\square$

Következmény. Speciálisan, a szabad Abel-csoportok a $\oplus\mathbb{Z}$ direkt összegek.

($\mathbb{Z}$-vel és $\mathbb{Z}_n$-nel fogjuk jelölni a $(\mathbb{Z}, +)$ és $(\mathbb{Z}_n, +)$ Abel-csoportokat is, nemcsak a gyűrűket.)

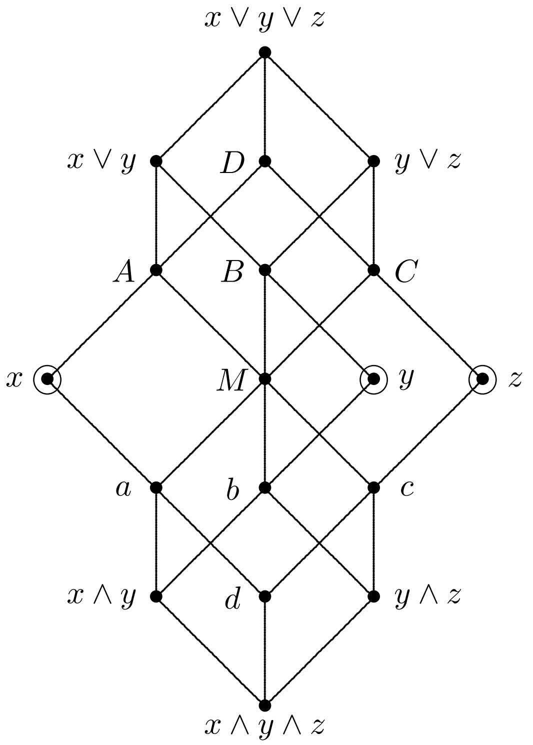
Pl. Az 1 elemmel generált szabad háló az egyelemű háló, a 2 elemmel generált az

M_2 : 

. Ha $\varphi : x \mapsto a$, $y \mapsto b$, $a, b \in L$, akkor összehasonlítható a, b esetén, mondjuk $a < b$-re $x, x \wedge y \mapsto a$ és $y, x \vee y \mapsto b$ homomorfizmus, összehasonlíthatatlanra pedig beágyazást kapunk.

A három elemmel generált szabad háló végtelen (ld. a 6. feladatsort), de a három elemmel generált disztributív, illetve moduláris háló csak 18, illetve 28-elemű.

Tétel. Az $\{\, x, y, z \,\}$ elemekkel generált szabad disztributív háló:



$D = x \vee z$
$A = x \vee (y \wedge z)$
$B = y \vee (x \wedge z)$
$C = z \vee (x \wedge y)$
$M = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
$a = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
$b = (x \wedge y) \vee (y \wedge z)$
$c = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
$d = x \wedge z$

Biz. Egy $X = \{x, y, z\}$ halmazzal generált disztributív hálóban minden elem felírható az X nem üres részhalmazai metszeteinek egyesítéseként, és ebben a kifejezésben elég a minimális halmazok metszeteit meghagyni, mert a többi elnyelődik. Ezek a kifejezések szerepelnek az ábrán, és könnyen ellenőrizhető rajtuk a részbenrendezés is.
Másrészt van olyan háló, ahol az itt felírt elemek valóban különbözők, például a $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ hatelemű halmaz hatványhalmazában az $\{i, j, -k\}$ alakú három halmaz (ahol $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) által generált részhálóban. Tehát létezik az ábrán szereplő háló, és minden disztributív hálóba menő $X \to L$ leképezés kiterjeszthető homomorfizmussá. □

Szabad csoportok részcsoportjai

Def. Egy szabad csoport (vagy szabad Abel-csoport) *rangja* a szabad generátorrendszerének számossága.

Áll. Szabad Abel-csoport és szabad csoport rangja egyértelmű.

Biz. Egy szabad Abel-csoport izomorf a $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}$ direkt összeggel valamely I-re. Ha egy I és J indexhalmazhoz tartozó A és B direkt összeg izomorf, akkor $\bar{A} = A/pA \cong B/pB = \bar{B}$, ahol $pA := \{pa \mid a \in A\}$, és az utóbbiak a $\mathbb{Z}_p$ test fölötti $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_p$ és $\bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}_p$ vektorterekkel izomorfak, így azoknak a dimenziója megegyezik, azaz $|I| = |J|$.

Ha az F csoportnak X szabad generátorrendszere, akkor az F/F'-nek mint Abel-csoportnak is szabad generátorrendszere az X, ugyanis tetszőleges $X \to A$ Abel-csoportba menő leképezés kiterjeszthető F-re homomorfizmusként, és ennek a magjában benne van F', így F/F'-re is kiterjeszthető. Tehát az előző rész miatt X számossága egyértelmű. □

Pl. Egy k rangú szabad csoportban lehet k-nál nagyobb rangú szabad részcsoport is, sőt véges rangúnak is lehet végtelen rangú szabad részcsoportja: az x, y elemekkel generált $F(x, y)$ szabad csoport egy részcsoportját szabadon generálják az $y, x^{-1}yx, x^{-2}yx, \ldots$ elemek.

Végesen generált csoport véges indexű részcsoportja viszont mindig végesen generált.

Tétel. Legyen $G = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$, és $H \le G$ egy k indexű részcsoport. Ekkor H-nak van $\le kn - k + 1$ elemű generátorrendszere.

Biz. Legyen a H jobb mellékosztályainak egy reprezentánsrendszere $\{x_1 = 1, x_2, \ldots, x_k\}$, azaz $G = \dot{\bigcup}_{1\le i\le k} Hx_i$. Minden i, j párra $Hx_ig_j = Hx_{i'}$ valamely i'-re. Legyen R az ilyen (i, j, i') hármasokhoz tartozó $x_ig_jx_{i'}^{-1}$ elemek halmaza. Így $R \subseteq H$, és ezek az elemek generálják is H-t: tetszőleges $h \in H$ elemet felírhatunk $h = u_1 \cdots u_t$ alakban, ahol minden u_i valamely g_j-vel vagy annak inverzével egyenlő. Ezt kibővíthetjük $h = (1u_1y_1^{-1})(y_1u_2y_2^{-1}) \cdots (y_{n-1}u_ny_n^{-1})y_n$ kifejezéssé, ahol minden $y_{i-1}u_iy_i^{-1} \in R \cup R^{-1} \subseteq H$, és így $y_n \in H \Rightarrow y_n = 1 \Rightarrow h \in \langle R \rangle$.

Ez ugyan kn elemű generátorrendszert ad, de csökkenthetjük a számosságát a reprezentánsok ügyes megválasztásával. Rajzoljuk fel egy irányított gráfba nyílként a g_j-k hatását mellékosztályokon, és vegyük a gráf egy feszítőfáját. Ezután a fa egy pontjától elindulva úgy válasszunk reprezentánselemeket, hogy kompatibilisek legyenek a megfelelő g_j elemmel való szorzással. Így a generátorrendszer elemszámát a fa éleinek számával, tehát $(k-1)$-gyel csökkenteni tudjuk. □

Tétel. *(Nielsen–Schreier-tétel)* Szabad csoport részcsoportja is szabad,
és n rangú szabad csoport k indexű részcsoportja $nk - k + 1$ rangú szabad csoport.

Megj. A részcsoport generátorrendszerének megkonstruálására adott előbbi módszert használja a Schreier–Sims-algoritmus egy generátorelemekkel megadott permutációcsoport elemszámának kiszámítására: az alaphalmaz egy elemének orbitját könnyű meghatározni a generátorelemekből, és egyúttal megadni a stabilizátor mellékosztályainak egy reprezentánsrendszerét. Így a $|G| = |\omega G| \cdot |G_\omega|$ összefüggés alapján a stabilizátor elemszámát kell már csak meghatározni, amelynek az előbbi módszerrel megkapjuk egy generátorrendszerét. Menetközben a kapott generátorrendszer méretét is lehet csökkenteni, hogy legföljebb a mozgatott elemek száma legyen (Jerrum-szűrő).

Tétel. Szabad Abel-csoport minden részcsoportja szabad.

Ezt a tételt most végesen generált szabad Abel-csoportokra fogjuk bizonyítani.

Tétel. Legyen $A = A(X) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}$ szabad Abel-csoport, ahol X elemei az $x_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ elemek, és legyen $B \leq A$. Ekkor van A-nak olyan $\{ y_1, \ldots, y_n \}$ bázisa (azaz szabad generátorrendszere), hogy $B = \langle k_1 y_1, \ldots, k_n y_n \rangle$.

Biz. Legyen $B = \langle b_i \,|\, i \in I \rangle$. Írjuk fel a b_i elemek koordinátáit az X bázisban egy (esetleg végtelen magas) mátrix soraiba. Ha ezen a mátrixon $s_i \mapsto s_i + cs_j$ $(c \in \mathbb{Z})$ vagy $s_i \leftrightarrow s_j$ vagy $s_i \mapsto -s_i$ típusú sorműveletet végzünk, az B-nek továbbra is generátorrendszerét adja, ha pedig ugyanilyen oszlopműveletet, akkor az A-nak a bázisát cseréli ki egy másik bázisra, és a mátrix ettől fogva a B generátorelemeinek ebben a bázisban felírt koordinátáit mutatja.

A mátrixot ilyen műveletekkel diagonalizálni lehet. Egy minimális abszolút értékű elemet sor- és oszlopcserékkel a bal fölső sarokba viszünk, és ha a sorában vagy oszlopában van vele nem osztható, akkor kisebb absz. értékűt is előállíthatunk, ha nincs, akkor nullázunk. A második esetben, ha van vele nem osztható máshol, akkor az első sorhoz hozzáadva a sorát az előző műveletet ismételjük. Mivel a mátrix szélessége véges, véges sok lépésben diagonalizálni tudjuk a mátrixot, és az átlóbeli $k_1, \ldots, k_n$ elemekre (amelyekre mellesleg $k_1 \mid k_2 \mid \ldots$), és az új bázisra $B \, \langle k_1 y_1, \ldots, k_n y_n \rangle$. $\square$

Def. Egy $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ mátrix *Smith-normálalakja* a $D = PAS \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ diagonális mátrix, ha $P \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ és $S \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ determinánsa ± 1 (azaz P és S is invertálható $\mathbb{Z}$ fölött), és a D $d_1, d_2, \ldots$ diagonális elemeire $d_i \mid d_{i+1}$ $\forall i$. A fenti algoritmusból látszik, hogy minden egész elemű mátrixnak van ilyan alakja, és belátható, hogy a Smith normálalak a diagonális elemek előjelétől eltekintve egyértelmű (illetve a D elemei választhatók nemnegatívnak).

Következmény. Végesen generált szabad Abel-csoportnak minden részcsoportja legföljebb akkora rangú szabad Abel-csoport.

Biz. Ha az előbbi tételben kapott generátorrendszerben a k_r-ig nemnullák az együtthatók, és $k_{r+1} = \ldots = k_n = 0$, akkor $B = \langle k_1 y_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle k_r y_r \rangle \cong \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathbb{Z}$. $\square$

Tétel. *(Végesen generált Abel-csoportok alaptétele)*
Minden végesen generált Abel-csoport ciklikusok direkt szorzata.
Ez az előállítás (sorrendtől és izomorfiától eltekintve) egyértelmű, ha a véges ciklikusok prímhatványrendűek.

Biz. Legyen B egy n elemmel generált Abel-csoport, és $A = \bigoplus_{1 \le i \le n} \mathbb{Z}$. Ekkor van egy $\varphi : A \to B$ szürjektív homomorfizmus, és A-nak van olyan Y bázisa, amelyre $\operatorname{Ker}\varphi = \langle k_1 y_1, \ldots, k_n y_n \rangle$ valamely k_i-kkel. Így $B \cong \mathbb{Z}/k_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/k_n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{|k_1|} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{|k_n|}$. Ebből a 0 tényezőket (a $\mathbb{Z}_1$-eket) elhagyhatjuk.
Egyértelműség: a véges rendű elemek által alkotott B_0 torziórészcsoport véges Abel-csoport, és ennek egyértelmű a felírása, a végtelen tagokból álló komponens pedig a torziórészcsoport faktora, szabad Abel-csoport, így a rangja egyértelmű. □

Véges Abel-csoport részcsoportjának és faktorcsoportjának kanonikus alakja

Legyen $B = \langle b_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle b_k \rangle \cong \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \mathbb{Z}_{n_k}$. Tegyük fel, hogy B-nek egy C részcsoportja a generátorelemeivel, a b_i-k (egész)lineáris kombinációival van megadva. Határozzuk meg ennek alapján a B/C izomorfiatípusát!

Legyen $A = A(X)$ a k elemmel generált szabad Abel-csoport, és $\varphi : A \to B$ az $x_i \mapsto b_i$ leképezést kiterjesztő szürjektív homomorfizmus. Legyen C ősképe φ-nél $\tilde{C}$. A szabad csoport $\tilde{C}$ részcsoportját kigenerálja a C csoport B-beli generátorrendszerének egy-egy ősképe (a b_i-ket x_i-kkel helyettesítjük) és $K = \operatorname{Ker}\varphi$-nek az $\{\, n_1 x_1, \ldots, n_k x_k \,\}$ generátorrendszere. Mivel $B/C \cong (A/K)/(\tilde{C}/K) \cong A/\tilde{C}$, ezzel a kibővített generátorrendszerrel felírva a mátrixot, és azt diagonalizálva, megkapjuk a B/C faktorcsoport ciklikusok direkt összegére bontását.

Ha a $C \cong \tilde{C}/K$ csoport kanonikus alakját szeretnénk meghatározni, akkor az $A/\tilde{C}$ csoportra előbb alkalmazott módszert kiegészítjük azzal, hogy a K generátorelemeire még egyszer végrehajtjuk a $\tilde{C}$-nál alkalmazott oszlopműveleteket. Így megkapjuk K-nak az A új bázisában való felírását, s mivel $\tilde{C}$ bázisa az A-nak ebből a bázisából kapható a Smith normálalak $d_1, \ldots, d_r$ nem nulla diagonális elemeivel való szorzással, a d_i-kkel való osztással megkapjuk a K előállítását a $\tilde{C}$ szabad csoport bázisából. Ezt Smith-normálalakra hozva a korábbi módszerrel felírhatjuk a $C \cong \tilde{C}/K$ csoport ciklikus csoportok direkt összegére bontását.