

1. Leolvashatók-e egy csoport részcsoporthálójáról a következő tulajdonságok?
  - a) a csoport rendje;
  - b) a csoport végessége;
  - c) a normálosztóháló;
  - d) prírendű részcsoporthálók;
  - e) végesen generált részcsoporthálók;
  - f) ciklikus részcsoporthálók;
  - g) a csoport kommutativitása.
2. a) Bizonyítsuk be, hogy egy moduláris háló tetszőleges  $a, b$  elemére az  $a \wedge b$  és  $a$  közötti intervallum izomorf a  $b$  és  $a \vee b$  közötti intervallummal, és az izomorfizmust az  $x \mapsto x \vee b$ , az inverzét az  $y \mapsto y \wedge a$  leképezés adja meg.  
b) Lássuk be, hogy egy véges moduláris háló  $a < b$  elemekre egyértelmű az  $a$ -ból  $b$ -be menő, fedésekből álló lánc hossza.

*Egy  $L$  háló Boole-háló, ha korlátos (azaz  $0, 1 \in L$ ), disztributív, és minden  $a \in L$  elemnek van komplementuma, azaz olyan  $a' \in L$ , amelyre  $a \wedge a' = 0$  és  $a \vee a' = 1$ .*

3. Bizonyítsuk be, hogy egy Boole-hálóban minden elemnek egyértelmű komplementuma van.
  4. Bizonyítsuk be, hogy minden véges Boole-háló elemszáma 2-hatvány, és a háló izomorf egy halmaz hatványhalmazával. Mutassunk olyan végtelen Boole-hálót, amely nem izomorf semelyik hatványhalmazzal.
  5. Bizonyítsuk be, hogy  $S_n$  és  $A_n$  kommutátorrészcsoporthálójuk is  $A_n$ , ha  $n \geq 5$ .
  6. Bizonyítsuk be, hogy minden véges csoportnak van egy legnagyobb (azaz minden más ilyen tartalmazó) feloldható normálosztója.
  7. Bizonyítsuk be, hogy ha  $G$  véges nem kommutatív  $p$ -csoport, akkor  $G/G'$  nem lehet ciklikus. (Útmutatás: Lássuk be, hogy egy véges  $p$ -csoportban bármely nem triviális normálosztó metszi a centrumot.)
  8. Határozzuk meg a  $\mathbb{Z}_3$  test fölötti  $3 \times 3$ -as invertálható felső háromszög mátrixok csoportjának kommutátorláncát, és a kommutátorlánc faktorainak izomorfiatípusát.
- Hf1.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy moduláris hálóban minden elemnek van (nem feltétlenül egyértelmű!) komplementuma, akkor ez a háló minden intervallumára is igaz. Határozzuk meg azokat a (véges) Abel-csoportokat, amelyeknek komplementumos a részcsoporthálójuk.
- Hf2.** Határozzuk meg a  $D_n$  diédercsoportok kommutátorláncát.