1. Bizonyítsuk be, hogy egy nilpotens csoportban minden nem triviális normálosztó metszi a centrumot!

2. Bizonyítsuk be, hogy a H és N csoportok külső szemidirekt szorzata (a H és N Descartes szorzata a $(h,n)(h',n') = (hh', n^{h'\varphi}n')$ szorzással, ahol $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ homomorfizmus) valóban csoport.

3. Határozzuk meg a következő 2-csoportok alsó és felső centrálláncát.
a) az S_6 csoport 2-Sylowja
b) $Q \rtimes C_2 = \langle i,j\rangle \rtimes \langle a\rangle$, ahol $i^a = j$ és $j^a = i$ (lássuk is be, hogy van ilyen szemidirekt szorzat)

4. Tegyük fel, hogy $G = M \rtimes K$ a $\varphi : K \to \mathrm{Aut}\, M$ hatással és $H = N \rtimes L$ a $\psi : L \to \mathrm{Aut}\, N$ hatással. Bizonyítsuk be, hogy ha vannak olyan $\alpha : M \to N$ és $\beta : K \to L$ izomorfizmusok, amelyek kompatibilisek a φ és ψ hatásával, azaz $(m^{k\varphi})\alpha = (m\alpha)^{(k\beta)\psi}$ minden $m \in M$, $k \in K$-ra, akkor $G \cong H$.

5. Legyen $x, y \in G$. Bizonyítsuk be, hogy
a) $[x,y] = [y,x]^{-1}$;
b) $yx = xy[y,x]$;
c) $[xy,z] = [x,z]^y[y,z]$ és $[x,yz] = [x,z][x,y]^z$.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha p páratlan prím, és G p^3-rendű nemkommutatív csoport, akkor G előáll egy p^2-rendű normálosztó és egy p-edrendű részcsoport szemidirekt szorzataként. (Útmutatás: a Hf1 feladat segítségével lássuk be, hogy G-nek nemcsak egy p-edrendű részcsoportja van.)

7. Bizonyítsuk be, hogy páratlan p prímre (is) öt különböző p^3-rendű csoport van izomorfia erejéig. Adjuk meg a nemkommutatív csoportokat szemidirekt szorzatként.

8. Izomorf-e egymással a $Q \times C_2$ és a $C_4 \rtimes C_4$ csoport, ha az utóbbiban a C_4 részcsoport generátoreleme invertálással hat a C_4 normálosztón?

9. a) Bizonyítsuk be, hogy egy p^n rendű csoport nilpotenciaosztálya legföljebb $n-1$.
b) Lássuk be, hogy a 2^n rendű $D_{2^{n-1}}$ diédercsoport nilpotenciaosztálya pontosan $n-1$.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy ha $G' \le Z(G)$, akkor bármely $x, y \in G$-re és n pozitív egész számra $(xy)^n = x^n y^n [y,x]^{\binom{n}{2}}$.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy egy $S_3 \rtimes C_5$ szorzat csak direkt szorzat lehet! (Útmutatás: hogyan hathat a C_5 generátorelemével való konjugálás S_3-on?)