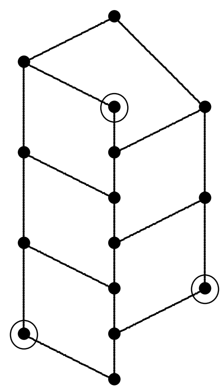
1. A következő tulajdonságú csoportok közül melyek alkotnak varietást? Amelyik osztály nem varietás, az a H,S,P közül melyikre nem zárt? Amelyik igen, ahhoz adjunk meg definiáló azonosságo(ka)t!
  a) feloldható
  b) legfeljebb két lépésben feloldható, azaz $G'' = 1$
  c) osztható Abel-csoportok (azaz, additívan írva, minden x elemhez és minden $n \in \mathbb{N}^+$-hoz van olyan y elem, amelyre $x = ny$)
  d) torziómentes Abel-csoportok (azaz, ahol minden nem triviális elem rendje végtelen)
  e) azok a G csoportok, amelyekre $G/Z(G)$ Abel

2. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi típusú (tetszőleges magasságú) hálókat generálja a kijelölt három elem, tehát a három elemmel generált szabad háló végtelen.



3. Bizonyítsuk be, hogy az $F(x, y)$ szabad csoportban az $y, x^{-1}yx, x^{-2}yx, \dots$ elemek szabadon generálnak egy részcsoportot, tehát a 2 rangú szabad csoportba beágyazható a megszámlálhatóan végtelen rangú szabad csoport (és így bármely véges rangú is).

4. Keressünk az $F(x, y)$-ban három elemű minimális generátorrendszert!

5. Legyen V_K egy megszámlálható dimenziós vektortér, és $R = \mathrm{End}(V)$ (másképpen, R a K fölötti olyan $\omega \times \omega$ méretű mátrixok gyűrűje, ahol a mátrixok minden oszlopában csak véges sok elem nem nulla). Bizonyítsuk be, hogy ${}_RR \cong {}_RR \oplus {}_RR$ mint modulus, tehát a szabad modulusok szabad generátorrendszerének mérete általában nem egyértelmű.

6. Keressünk az $F(x, y)$ szabad csoportban 2 indexű részcsoportot (használjuk hozzá a C_2 egy prezentációját), és lássuk be, hogy ennek a csoportnak van 3 elemű szabad generátorrendszere!

7. Oldjuk meg a következő diofantoszi egyenletrendszert a mátrixának Smith-normálalakra hozásával!

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3x & - & y & & & = & 1 \end{array}$$

8. Adjuk meg a következő Abel-csoportok generátorokkal megadott részcsoportjának és a részcsoporttal vett faktorcsoportnak a kanonikus alakját!
  a) $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus \langle c \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, és $H = \langle 2a - 2b + 3c,\ 4b - 3c \rangle$
  b) $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus \langle c \rangle \cong \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, és $H = \langle 4a - c,\ b + c \rangle$.