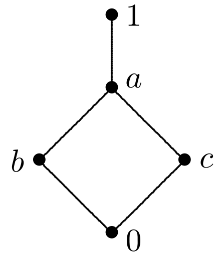
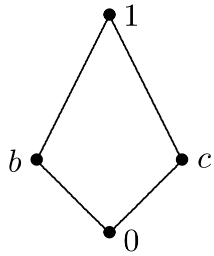
Csoportok és gyűrűk **1. feladatsor** *2020. február 14.*

1. *Adjunk példát olyan L hálóra, és annak egy S részhalmazára, hogy S nem részháló L-ben, de az L-en természetesen definiált részbenrendezés S-re való megszorítása az S-en is hálót definiál. Hány elemű a legkisebb ilyen L?*

Megoldás: Egy részcsoportháló benne van a csoport hatványhalmazában, és a hálóhoz tartozó rendezés ugyanaz a tartalmazás szerinti rendezés, mint amit a hatványhalmaztól örökölt, de általában nem zárt az unióra, tehát nem részháló.

Ha L egy részhalmaza láncot alkot, azaz bármely két elem összehasonlítható, akkor az egyesítés és a metszet a részhalmazban is a két elem nagyobbika, illetve kisebbike, így ebben az esetben részhálót kapunk. Tehát ha ellenpéldát keresünk, akkor S-ben kell lennie egy legnagyobb és egy legkisebb elemnek a 3. a) feladat szerint, és legalább két összehasonlíthatatlannak, ezért S legalább 4-elemű, L pedig legalább 5-elemű. Ekkora ellenpélda valóban létezik:

L :


$S = \{ 1, b, c, 0 \} =$


Itt S nem részháló, mert S-ben nincs benne a b és c L-beli egyesítése, illetve itt az egyesítésük a helyett 1.

2. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges részben rendezett halmazban teljesül az $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ asszociativitási tulajdonság (és ugyanez az egyesítésre is) mindazokra az a, b, c elemekre, amelyekre mindkét oldal értelmezve van.*

Megoldás: Legyen $x = (a \wedge b) \wedge c$. Ekkor
$x \leq a \wedge b \leq a$, $x \leq a \wedge b \leq b$ és $x \leq c$,
tehát $x \leq a$ és $x \leq b \wedge c$, amiből $(a \wedge b) \wedge c = x \leq a \wedge (b \wedge c)$.
Ugyanígy $a \wedge (b \wedge c) \leq (a \wedge b) \wedge c$, ezért a két oldal egyenlő.
A bizonyítás duálisa ($\wedge$ helyett $\vee$, $\leq$ helyett $\geq$ mindenhol) adja azt, hogy $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.

3. *a) Bizonyítsuk be, hogy egy véges hálónak mindig van legkisebb és legnagyobb eleme, de végtelen hálóra ez nem feltétlenül igaz.*

b) Bizonyítsuk be, hogy ha egy részbenrendezett halmaznak van legnagyobb eleme, és az elemek minden nem üres részhalmazának van legnagyobb alsó korlátja, akkor minden nem üres részhalmaznak van legkisebb felső korlátja, és így a részbenrendezés (teljes) hálót definiál.

Megoldás: a) Vehetjük az összes elem egyesítését, ami nyilván felső korlátja mindegyiknek, illetve az összes elem metszetét, ami alsó korlátja az összes elemnek. Viszont egy tetszőleges rendezett halmaz (azaz lánc) hálót alkot, de nem feltétlenül van legkisebb vagy legnagyobb eleme, vehetjük például a $\mathbb{Z}$ halmazt a természetes rendezésére nézve.

b) Tegyük fel, hogy L egy részbenrendezett halmaz egy $1 \in L$ legnagyobb elemmel, és L-ben minden nemüres halmaznak van legnagyobb alsó korlátja. Legyen $\emptyset \neq X \subseteq L$. Jelölje Y az X összes felső korlátainak halmazát, azaz $Y = \{ a \in L \mid x \leq a \ \forall x \in X \}$. Ez nyilván nem üres, mert 1 felső korlátja minden elemnek. Legyen most y_0 az Y

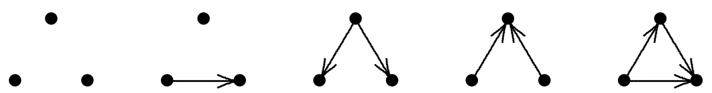
legnagyobb alsó korlátja. Vegyük észre, hogy X minden eleme alsó korlátja az egész Y-nak, ezért $x \leq y_0$ minden x-re, vagyis y_0 felső korlátja X-nek. De $y_0 \leq y$ minden $y \in Y$-ra, ezért y_0 az X legkisebb felső korlátja.

4. *Rajzoljuk föl az összes*
a) 3- *és* 4-*elemű részbenrendezett halmazt;*
b) legföljebb 5-*elemű hálót*
izomorfia erejéig.

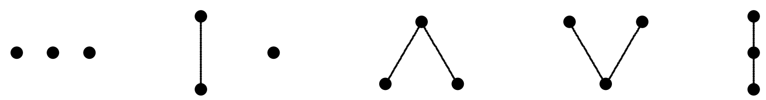
Megoldás:

a) A részbenrendezéseket felsorolhatjuk úgy, mint irányított gráfokat, ahol a-ból b-be akkor megy él, ha $a > b$. Vegyük sorra a lehetséges irányítatlan gráfokat élszám szerint, aztán irányítsuk úgy, hogy az irányítás ne mondjon ellent a rendezési reláció tranzitivitásának. Két részbenrendezett halmaz pontosan akkor lesz izomorf, ha a megfelelő irányított gráfok izomorfak.

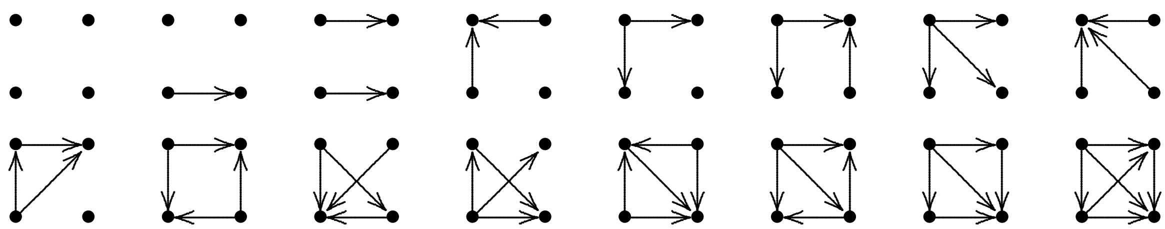
A 3-elemű irányított gráfok:



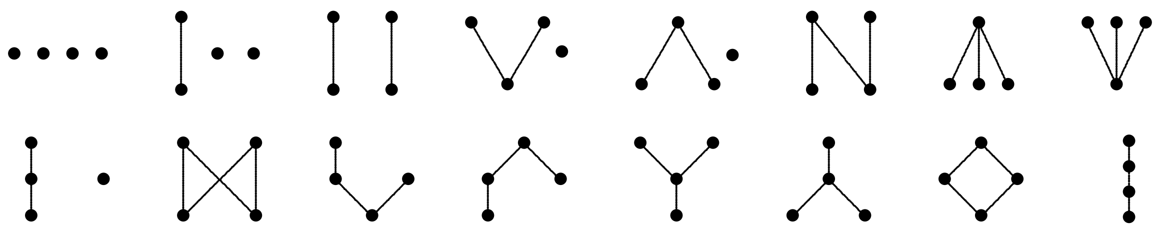
és a hozzájuk tartozó részbenrendezett halmazok:



A 4-elemű irányított gráfok:

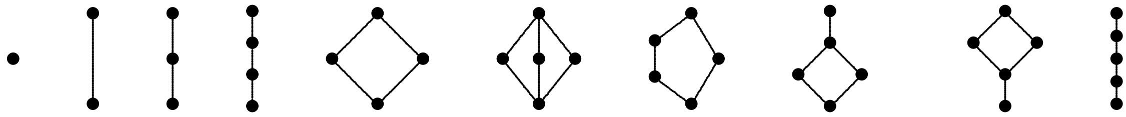


és a hozzájuk tartozó részbenrendezett halmazok:



b) Mivel egy véges hálónak mindig van legkisebb és legnagyobb eleme, csak az számít, hogy a közbülső elemeken milyen részbenrendezést adunk meg. Így az 1-, 2- és 3-elemű háló egyértelmű, 4-eleműből kettő van: a két közbülső elem vagy összehasonlítható, vagy nem, végül az 5-eleműeket úgy kapjuk meg, hogy az a) részben felsorolt 3-elemű részbenrendezett halmazokat kiegészítjük egy legkisebb és egy legnagyobb elemmel. Ellenőrizni kell még, hogy így valóban hálót kapunk-e, de csak akkor nem lesz ez a kiegészítés háló, ha a részbenrendezett halmazban valamelyik két elemnek több minimális felső korlátja vagy több minimális alsó korlátja is volt. Így még a 6-eleműekből is csak a 2. sor 2. eleméből gyártott részbenrendezett halmazt kell kizárni.

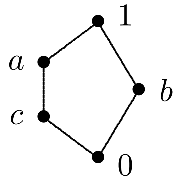
A legföljebb 5 elemű hálók tehát:



Egy L háló moduláris, ha minden $a, b, c \in L$-re $a \geq c$ esetén $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$. A disztributív hálók nyilván modulárisak is.

5. *Bizonyítsuk be, hogy N_5 nem moduláris, és fordítva, ha L nem moduláris, azaz valamely a, b, c elemekre nem teljesül a fenti összefüggés, akkor az $a \wedge (b \vee c)$, $(a \wedge b) \vee c$ és b elemek egy N_5-tel izomorf részhálót generálnak.*

Megoldás: Ha N_5 elemei:



akkor $a > c$, és $a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$ és $(a \wedge b) \vee c = 0 \vee c = c$, tehát N_5-ben nem teljesül a moduláris azonosság.

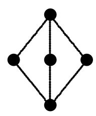
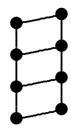
Tetszőleges $a \geq c$-re igaz, hogy $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee c$, mert a felső korlátja $a \wedge b$-nek és c-nek is, tehát $a \geq (a \wedge b) \vee c$, továbbá $b \vee c$ is felső korlátja mindkettőnek, így $b \vee c \geq (a \wedge b) \vee c$, és ebből $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee c$ következik. Tehát ha a, b, c-re nem teljesül a moduláris azonosság, akkor $x = a \wedge (b \vee c)$-re és $y = (a \wedge b) \vee c$-re $x > y$. Másrészt $y \vee b = (a \wedge b) \vee c \vee b = ((a \wedge b) \vee b) \vee c = b \vee c \geq x$ és $x \wedge b = a \wedge (b \vee c) \wedge b = a \wedge b \leq y$, ezért $b \vee c \geq x \vee b \geq y \vee b = b \vee c$ miatt $x \vee b = b \vee c$ és $a \wedge b \leq y \wedge b \leq x \wedge b = a \wedge b$ miatt $y \wedge b = a \wedge b$. Azt kell még belátnunk, hogy $x, y, b, a \wedge b, b \vee c$ különböző elemek.
Ha $b \geq x$, akkor $x = x \wedge b = y \wedge b \leq y$; ha $b \leq y$, akkor $y = y \vee b = x \vee b \geq x$; mindkettő ellentmond az $y < x$ feltevésnek. Így $b \notin \{\, a \wedge b, y, x, b \vee c \}$.
Ha $a \wedge b = y$, akkor $b = (a \wedge b) \vee b = y \vee b = x \vee b$ miatt $b \geq x$; ha $b \vee c = x$, akkor $b = (b \vee c) \wedge b = x \wedge b = y \wedge b$ miatt $b \leq y$, ellentmondva az eddigieknek.
Tehát $a \wedge b < y < x < b \vee c$, és így $\{\, x, y, b, a \wedge b, b \vee c \}$ ötelemű halmaz, amely N_5-tel izomorf részhálót alkot L-ben.

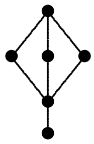
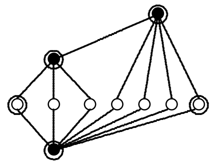
6. *Rajzoljuk fel a következő csoportok részcsoporthálóját! Jelöljük meg bennük a normálosztókat!*

a) C_4, C_{32}, $C_2 \times C_2$, C_{54}; *b) a Q kvaterniócsoport;* *c)* A_4.

Amelyik nem moduláris, vagy moduláris ugyan, de nem disztributív, abban mutassunk N_5-tel, illetve M_3-mal izomorf részhálót.

Megoldás: Az a) részben Abel-csoportok vannak, és Q-nak is minden részcsoportja centrális vagy 2 indexű, így normálosztó, ezért ezek a csoportok modulárisak. Ezek közül $C_2 \times C_2$ és Q részcsoporthálója nem disztributív: $L(C_2 \times C_2) \cong M_3$, a Q kvaterniócsoportnak pedig intervalluma az M_3. Az ábrákon fekete helyett fehér körrel jelöljük a nem normálosztókat, és bekarikázással egy N_5-tel izomorf részháló elemeit (ahol van).

$L(C_4) \cong$  $L(C_{32}) \cong$  $L(C_2 \times C_2) \cong$  $L(C_{54}) \cong$ 

$L(Q) \cong$  $L(A_4) \cong$ 

7. *Bizonyítsuk be, hogy egy csoport részcsoporthálója pontosan akkor véges, ha a csoport véges!*

Megoldás: Ha G véges, akkor nyilván $L(G)$ is véges. Ha G végtelen, és van benne végtelen rendű elem, akkor $L(C_\infty)$ intervalluma $L(G)$-nek, és már az is végtelen ($\langle a \rangle \cong C_\infty$-nek minden $n \in \mathbb{N}^+$-re $\langle a^n \rangle$ n indexű részcsoportja). Ha pedig G végtelen, de minden eleme véges rendű, akkor a ciklikus részcsoportok is végtelen sokan vannak, mivel G minden eleme generál egyet, és csak véges sok elem generálhatja ugyanazt.

8. *Határozzuk meg az összes olyan csoportot, amelynek a részcsoporthálója M_2, M_6, illetve M_7, ahol M_n azt az $(n+2)$-elemű hálót jelöli, amelynek n közbülső eleme páronként összehasonlíthatatlan.*

Megoldás: Vegyük észre, hogy a részcsoportháló 0-elem fölötti minimális elemei éppen a csoport prímrendű részcsoportjai: csak a prímrendűeknek nincs valódi részcsoportja. Tehát ha a részcsoportháló M_n, akkor a csoportnak minden valódi részcsoportja prímrendű. Ez történhet úgy, hogy G p-csoport, de mivel p-csoportban (sőt minden feloldható csoportban) van olyan kompozíciólánc, amelynek minden faktora prímrendű, ebben az esetben $|G| = p^2$, következésképpen G Abel-csoport, azaz $G \cong C_{p^2}$ vagy $G \cong C_p \times C_p$. Az első esetben a részcsoportháló 3-elemű lánc, tehát nem izomorf semelyik megadott hálóval, a másodikban a p-edrendű részcsoportok száma $(p^2-1)/(p-1) = p+1$, tehát ekkor $L(G) \cong M_{p+1}$. A megadott három háló közül csak a második ilyen, tehát M_6 a részcsoporthálója a $C_5 \times C_5$ csoportnak, de a többire nincs megfelelő p-csoport.

Ha G nem p-csoport, akkor minden Sylow-részcsoportja prímrendű ciklikus. Ha valamelyik normálosztó, akkor a részcsoporthálóból leolvasható, hogy a vele vett faktorcsoport is prímrendű, tehát $|G| = pq$ valamely $p \neq q$ prímekre. Ha a p-Sylow nem normálosztó, akkor legalább $p+1$ darab p-Sylow van G-ben.

Ha $L(G) \cong M_2$, akkor ebből az következik, hogy két különböző prímhez tartozó Sylow-részcsoport van, és mindkettő normálosztó, így $G \cong C_p \times C_q \cong C_{pq}$ valamely $p \neq q$ prímekre.

Ha $L(G) \cong M_6$, akkor valamelyik Sylow-részcsoport normálosztó, mert különben a p- és q-Sylowok száma együtt legalább $(p+1)+(q+1) \geq 7$ lenne. Legyen a p-Sylow a normálosztó. Láttuk, hogy ekkor $|G| = pq$, és a q-Sylowok száma a részcsoportháló miatt $6-1=5$, így $5 \mid |G|$, s mivel $5 \equiv 1 \pmod q$, a q csak 2 lehet, tehát $|G| = 10$. Ebben az esetben az 5-Sylow normálosztó, és egy másodrendű elemmel való konjugálás ezen csak invertálással hathat, tehát $G \cong D_5$.

Végül ha $L(G) \cong M_7$, és valamelyik Sylow normálosztó, akkor ugyanúgy, mint az előbb, azt kapjuk, hogy $|G| = pq$ és 6 darab q-Sylow van, de akkor $6 \mid |G : Q|$ (ahol Q a q-Sylow) ellentmondásra vezet. Viszont ha nincs Sylow normálosztó, akkor $p \neq q$ prímosztókra a p- és q-Sylowok együttes száma legalább $(p+1)+(q+1) \geq 7$, így ennél több prímosztó nem is lehet, és ez is csak akkor, ha a két prímosztó 2 és 3, és a 3-Sylowok száma 4. De akkor $4 \mid |G|$ miatt a 2-Sylow nem lenne prímrendű, ami ellentmond a megoldás elején tett megállapításainknak.

Összefoglalva,

$$L(G) \cong M_2 \;\Leftrightarrow\; G \cong C_{pq} \text{valamely } p \neq q \text{ prímekre}$$

$$L(G) \cong M_6 \;\Leftrightarrow\; G \cong C_5 \times C_5 \text{ vagy } G \cong D_5$$

$$L(G) \cong M_7 \text{ lehetetlen.}$$

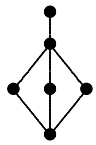
Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy hálóban minden a, b, c elemre teljesül az*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

disztributív azonosság, akkor a duálisa,

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

is teljesül minden a, b, c-re.

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy véges csoportnak egyetlen maximális részcsoportja van, akkor az ciklikus! Van-e olyan csoport, amelynek a részcsoporthálója*  *?*

És olyan, amelynek ez a háló részhálója?