1. *Leolvashatók-e egy csoport részcsoporthálójáról a következő tulajdonságok?*

a) a csoport rendje;
b) a csoport végessége;
c) a normálosztóháló;
d) prímrendű részcsoportok;
e) végesen generált részcsoportok;
f) ciklikus részcsoportok;
g) a csoport kommutativitása.

Megoldás: a) Nem, pl. $L(C_3 \times C_3) \cong M_4 \cong L(S_3)$, de $|C_3 \times C_3| = 9$, és $|S_3| = 6$.

b) Igen, G pontosan akkor véges, ha $L(G)$ véges. Az nyilvánvaló, hogy véges csoport részcsoporthálója véges. Ha a csoport végtelen, akkor vagy van végtelen rendű eleme, és akkor az $L(C_\infty)$ végtelen háló részhálója $L(G)$-nek, vagy végtelen sok véges rendű eleme van. Mivel ezek közül csak véges sok generálja ugyanazt a részcsoportot, végtelen sok ciklikus részcsoportja van G-nek, így $L(G)$ ebben az esetben is végtelen.

c) Nem, a $C_3 \times C_3$ és S_3 esete erre is ellenpélda: az elsőben minden részcsoport normálosztó, tehát a normálosztóháló M_4, a másodikban A_3 az egyetlen valódi normálosztó, tehát a normálosztóháló egy 3-elemű lánc.

d) Igen, a prímrendű részcsoportok az atomok, azaz a nullelem fölötti minimális elemek a hálóban.

e) Igen, ezek pontosan a háló *kompakt* elemei, azaz a háló azon a elemei, amelyekre igaz, hogy $a \leq \bigvee_{i\in I} x_i \Rightarrow \exists J \subseteq I$, hogy $|J| < \infty$ és $x \leq \bigvee_{i\in J} x_i$.
Valóban, ha $H \leq G$ végesen generált, és $H \leq \bigvee_{i\in I} K_i$ valamely $K_i \leq G$ részcsoportokra, akkor H minden generátorelemének az előállításában csak véges sok K_i szerepel, tehát az összes generátorelem, és így az egész H is benne van véges sok K_i egyesítésében.
Fordítva, tegyük fel, hogy H kompakt az $L(G)$-ben. Nyilvánvaló, hogy $H \leq \bigvee_{h\in H} \langle h\rangle$, tehát a kompaktság miatt $\exists h_1, \ldots, h_n \in H$: $H \leq \langle h_1\rangle \vee \ldots \vee \langle h_n\rangle = \langle h_1, \ldots, h_n\rangle$, és az utóbbi benne van H-ban, így $H = \langle h_1, \ldots, h_n\rangle$

f) Igen, ezek a hálónak azok a kompakt elemei, amelyek alatti intervallum disztributív, ugyanis tudjuk, hogy a disztributív részcsoporthálójú csoportok éppen a lokálisan ciklikus csoportok, tehát ha a csoport maga végesen generált, akkor ciklikusnak kell lennie.

g) Nem, erre is ellenpélda a $C_3 \times C_3$ és az S_3.

2. *a) Bizonyítsuk be, hogy egy moduláris háló tetszőleges a, b elemére az $a \wedge b$ és a közötti intervallum izomorf a b és $a \vee b$ közötti intervallummal, és az izomorfizmust az $x \mapsto x \vee b$, az inverzét az $y \mapsto y \wedge a$ leképezés adja meg.*

b) Lássuk be, hogy egy véges moduláris háló $a < b$ elemeire egyértelmű az a-ból b-be menő, fedésekből álló lánc hossza.

Megoldás: a) Vegyük észre először, hogy az $f : x \mapsto x \vee b$, illetve $g : y \mapsto y \wedge a$ leképezés minden hálóban tetszőleges a, b-re monoton:
$x \leq x' \Rightarrow x \vee x' = x' \Rightarrow (x \vee b) \vee (x' \vee b) = x \vee x' \vee b = x' \vee b \Rightarrow x \vee b \leq x' \vee b$, és
$y \leq y' \Rightarrow y \wedge y' = y \Rightarrow (y \wedge a) \wedge (y' \wedge a) = y \wedge y' \wedge a = y \wedge a \Rightarrow y \wedge a \leq y' \wedge a$. Így
$a \wedge b \leq x \leq a$-ra $b = (a \wedge b) \vee b \leq x \vee b \leq a \vee b$, és $b \leq y \leq a \vee b$-re $a \wedge b \leq a \wedge y \leq a \wedge (a \vee b) = a$, tehát f és g valóban a megadott két intervallumot képezi egymásba.

Az f és g leképezés egymás inverze, ugyanis

$$(x \vee b) \wedge a \underset{x \leq a}{=} x \vee (b \wedge a) \underset{x \geq a \wedge b}{=} x, \quad \text{és}$$

$$(y \wedge a) \vee b \underset{y \geq b}{=} y \wedge (a \vee b) \underset{y \leq a \vee b}{=} y.$$

Ebből következik, hogy az $f : x \mapsto x \vee b$ leképezés bijekció, és mivel f, és az inverze, g is monoton, $x \leq x' \Leftrightarrow f(x) \leq f(x')$, tehát f izomorfizmus.

b) Mivel moduláris háló minden részhálója, így intervalluma is moduláris, elég az állítást a 0 és 1 közötti láncokra bizonyítani. Teljes indukciót használunk a legrövidebb, fedésekből álló lánc hosszára. Ha ez 1, akkor 1 fedi 0-t, tehát nincs köztük más elem. Most tegyük fel, hogy $n-1$-re már tudjuk, és egy hálóban a legrövidebb tovább nem finomítható lánc ℓ, amelynek hossza n, egy másik 0-ból 1-be menő tovább nem finomítható lánc pedig ℓ', amelynek hossza $m \geq n$. Ha ℓ és ℓ' 1 alatti eleme megegyezik, akkor az indukciós feltevés miatt $n-1 = m-1$, tehát $n = m$. Ha viszont az 1 alatti elemeik $x \neq y$, akkor az a) részből következően $x \wedge y < x < 1$ és $x \wedge y < y < 1$ is fedések sorozata, és ha a $0 < x \wedge y$ láncot minimális hosszúságú, fedésekből álló ℓ'' lánccal helyettesítjük, akkor x-re, majd y-ra alkalmazva az indukciós feltevést, azt kapjuk, hogy ℓ'' hossza $n-2$, és így ℓ' hossza, $m = n$.

Egy L háló Boole-háló, ha korlátos (azaz $0, 1 \in L$), disztributív, és minden $a \in L$ elemnek van komplementuma, azaz olyan $a' \in L$, amelyre $a \wedge a' = 0$ és $a \vee a' = 1$.

3. *Bizonyítsuk be, hogy egy Boole-hálóban minden elemnek egyértelmű komplementuma van.*

Megoldás: Tegyük fel, hogy az $a \in L$ elemnek a' és a'' is komplementuma. Ekkor $a'' = 1 \wedge a'' = (a \vee a') \wedge a'' = (a \wedge a'') \vee (a' \wedge a'') = 0 \vee (a' \wedge a'') = a' \wedge a''$, így $a'' \leq a'$, és ugyanígy $a' \leq a''$, tehát $a' = a''$.

4. *Bizonyítsuk be, hogy minden véges Boole-háló elemszáma 2-hatvány, és a háló izomorf egy halmaz hatványhalmazával. Mutassunk olyan végtelen Boole-hálót, amely nem izomorf semelyik hatványhalmazzal.*

Megoldás: Mivel a háló véges, vannak atomjai, sőt, minden $\neq 0$ eleme alatt van atom. Legyenek ezek $a_1, \ldots, a_n$.

Ekkor minden $x \in L$ előáll atomok egyesítéseként:
Legyen ugyanis $u = \bigvee \{\, a_i \mid a_i \leq x \,\}$. Ekkor $u \leq x$, és ha $u \neq x$, akkor $x \wedge u' \neq 0$ ($'$-vel jelölve a komplementumot), mert különben $x \vee u' \geq u \vee u' = 1$ miatt $x' = u'$ lenne, amiből $x = u$ ellentmondásra vezet. De akkor $\exists a_j \leq x \wedge u'$, ami nyilván különbözik az u-t alkotó atomoktól, és ez ellentmond u definíciójának. Tehát $x = u = \bigvee \{\, a_i \mid a_i \leq x \,\}$.

Ez az előállítás sorrendtől eltekintve egyértelmű: ha atomoknak egy x egyesítésében szerepel a_i és egy y-ban nem, akkor $x \wedge a_i = a_i$, viszont a disztributivitás miatt $y \wedge a_i = 0$, tehát akkor $x \neq y$.

Tehát a $\varphi : L \to \mathcal{P}(\{\, a_1, \ldots, a_n \,\})$, $\varphi(x) = \{\, a_i \mid a_i \leq x \,\}$ leképezés bijekció, és inverze a $H \mapsto \bigvee H$ leképezés. Mindkettő rendezéstartó, ezért L valóban izomorf a hatványhalmazzal.

Végtelen ellenpélda lehet egy megszámlálható halmaz véges és kovéges (azaz véges komplementumú) részhalmazainak Boole-hálója. Mivel ez megszámlálható, a legkisebb végtelen hatványhalmaz pedig kontinuum számosságú, ez a háló nyilván nem lehet izomorf egy teljes hatványhalmazzal.

5. *Bizonyítsuk be, hogy S_n és A_n kommutátorrészcsoportja is A_n, ha $n \geq 5$.*

Megoldás: $S_n/A_n \cong C_2$ miatt $A_n \geq S_n'$, másrészt tudjuk, hogy $n \geq 5$-re A_n egyszerű, és S_n-nek A_n az egyetlen valódi, nemtriviális normálosztója, továbbá $S_n/1 = S_n$ nemkommutatív, ezért S_n' csak A_n lehet. A_n sem kommutatív, így a két normálosztója közül csak A_n lehet a kommutátor-részcsoportja.
Az A_n egyszerűségének felhasználása nélkül is könnyen bebizonyíthatjuk, hogy $S_n' = A_n$: $(123) = (13)(23) = (13)^{-1}(13)^{(12)} = [(13),(12)] \in S_n'$, és átszámozással azt kapjuk, hogy A_n minden 3-ciklusa kommutátorelem S_n-ben, ezek pedig kigenerálják A_n-et. (Ehhez még az $n \geq 5$ feltétel sem kell, elég, hogy $n \geq 3$.) Sőt, $n \geq 5$-re A_n-ben is előállíthatjuk kommutátorelemként a 3-ciklusokat: $(123) = (13)(45) \cdot (23)(45) = ((13)(45))^{-1}((13)(45))^{(132)} = [(13)(45),(132)] \in A_n'$, tehát $A_n' = A_n$ is teljesül.

6. *Bizonyítsuk be, hogy minden véges csoportnak van egy legnagyobb (azaz minden más ilyet tartalmazó) feloldható normálosztója.*

Megoldás: Mivel a csoport véges, van maximális feloldható normálosztója, legyen ez N. Ekkor tetszőleges M feloldható normálosztóra $MN/N \cong M/(M \cap N)$ feloldható, mert M faktora, és N is feloldható, így MN is feloldható. Viszont $MN \geq N$, így az N maximalitása miatt $MN = N$, azaz $M \leq N$.

7. *Bizonyítsuk be, hogy ha G véges nem kommutatív p-csoport, akkor G/G' nem lehet ciklikus. (Útmutatás: Lássuk be, hogy egy véges p-csoportban bármely nem triviális normálosztó metszi a centrumot.)*

Megoldás: Először az útmutatásban szereplő állítást látjuk be.
Egy normálosztó teljes G-konjugáltosztályok uniója. Tehát ha $|G| = p^n$ és $1 \neq N \lhd G$, akkor az N-be eső konjugáltosztályokra felírva az osztályegyenletet, azt kapjuk, hogy $|N| = |N \cap Z(G)| + \sum \{\, |\mathcal{K}_i| \mid \mathcal{K}_i \subseteq N,\ |\mathcal{K}_i| > 1 \,\}$, és itt $|N|$ is, és a szummában levő összeadandók is oszthatók p-vel ($|\mathcal{K}(x)| = |G : C_G(x)| \mid |G| = p^n$), így $p \mid |N \cap Z(G)|$.
A feladat állítását $|G|$-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

Ha G véges, nem kommutatív p-csoport, akkor az előbbiek alapján $1 \neq Z := G' \cap Z(G) \leq Z(G) < G$. Tekintsük a G/Z csoportot. Ha ez kommutatív, akkor $Z \geq G'$, amiből $Z(G) \geq G'$ következik, és így G/G'-nek homomorf képe $G/Z(G) \cong (G/G')/(Z(G)/G')$, a $G/Z(G)$ faktorcsoport pedig G nem-kommutativitása miatt nem lehet ciklikus, így G/G' sem az. Ha viszont G/Z nem-Abel, akkor alkalmazhatjuk rá az indukciós feltevést, és így $G/G' \cong (G/Z)/(G'/Z) = (G/Z)/(G/Z)'$ nem ciklikus.

8. *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_3$ test fölötti 3×3-as invertálható felső háromszögmátrixok csoportjának kommutátorláncát, és a kommutátorlánc faktorainak izomorfiatípusát.*

Megoldás: Legyen G a $\mathbb{Z}_3$ fölötti invertálható felső háromszögmátrixok csoportja, és $N \leq G$ ezek közül azoknak a halmaza, amelyeknek az átlójában csak 1-ek vannak. Mivel két háromszögmátrix szorzatának átlójában a megfelelő diagonális elemek szorzata áll, $N \lhd G$. Továbbá N mellékosztályainak teljes reprezentánsrendszerét adja a diagonális mátrixok H részcsoportja, így $G/N \cong H \cong C_2 \times C_2 \times C_2$ Abel-csoport. Ebből következik, hogy

$G' \leq N$. Viszont a 27-elemű N normálosztót kigenerálják a kommutátorelemek, mert pl. $D_1 = diag(-1,1,1)$-re, $D_2 = diag(1,-1,1)$-re és

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\text{-re}\quad [A, D_1] = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \text{és}\quad [A, D_2] = \begin{bmatrix} 1 & a & -ac \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és ezek legalább $9 + 6 = 15$ különböző mátrixot adnak, így $|G'| \mid |N| = 27$ miatt $G' = N$. Könnyen látható, hogy N nem-Abel 3-csoport, így $|G''| = |N'| = |Z(N)| = 3$, és $G''' = 1$. A faktorok $C_2 \times C_2 \times C_2$, $C_3 \times C_3$ (ugyanis $N/Z(N)$ nem lehet ciklikus) és C_3. (Mellesleg, $Z(N)$ azokból a mátrixokból áll, amelyeknek a diagonális 1-eken kívül csak a jobb fölső sarokban lehet nemnulla eleme.)

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy moduláris hálóban minden elemnek van (nem feltétlenül egyértelmű!) komplementuma, akkor ez a háló minden intervallumára is igaz. Határozzuk meg azokat a (véges) Abel-csoportokat, amelyeknek komplementumos a részcsoporthálójuk.*

Hf2. *Határozzuk meg a D_n diédercsoportok kommutátorláncát.*