1. *Legyen G a kocka egybeválgósági csoportja. Ezt tekinthetjük S_8 részcsoportjának is a csúcsokon való hatással.*
a) Mi a G rendje?
b) Hány orbitja van G-nek, ha
b1) a kételemű csúcshalmazokon hattatjuk;
b2) a háromelemű csúcshalmazokon hattatjuk?
c) Hány elemű orbitjai vannak a G hatásának a kocka teljes felszínén?

Megoldás: a) Az csoport rendjét kiszámíthatjuk a $|G| = |\alpha G| \cdot |G_\alpha|$ összefüggés többszöri használatával. Jelöljük a kocka csúcsait az $1, 2, \ldots, 8$ számokkal, ahol 1 élszomszédai $2, 3, 4$, és a k-ból kiinduló testátló másik végpontja $9 - k$. Az 1 csúcs orbitja 8-elemű (lapközéppontokat összekötő tengely körüli forgatásokkal is át lehet vinni az 1-et bármely másik csúcsba), így $|G| = 8|G_1|$. Az 1-et helybenhagyó egybevágóságok az 1 szomszédait csak az 1 szomszédaiba vihetik, és azokat egymásba is lehet vinni az 1–8 testátló körüli 120°-os forgatásokkal, ezért a 2-nek a G_1 szerinti orbitja 3-elemű, tehát $|G| = 8|G_1| = 24|G_{1,2}|$. A $G_{1,2}$ elemei a 3-at csak 3-ba vagy 4-be vihetik, és az 1–2 élen és a kocka középpontján átfektetett síkra való tükrözés a 3-at valóban átviszi 4-be, miközben helyben hagyja az 1-et és a 2-t. Végül $G_{1,2,3}$ helyben hagyja 4-et, és így az egész kockát is, tehát $|G| = 24 \cdot 2|G_{1,2,3}| = 48$.

b1) Az élek, a lapátlók, és a testátlók (mint a végpontjaik halmazai) három különböző orbitba esnek, már a hosszuk alapján is, viszont könnyen látható, hogy az azonos fajták átvihetők egymásba, mozgatással is. Tehát erre a hatásra nézve G-nek három orbitja van (12, 12 és 4 elemszámmal).

b2) Itt is három orbit van: egy lap három csúcsa, a kocka középpontos tükrözésére nézve szemközti élpár három pontja, és három olyan pont, amelyek közül semelyik nem élszomszédos. Az orbitok mérete $6 \cdot 4 = 24$, $6 \cdot 4 = 24$, illetve 8 (minden csúcs körül egy). Összesen $24 + 24 + 8 = 56 = \binom{8}{3}$ valóban kiadja a teljes alaphalmazt.

c) A csúcsok 8-elemű, az élközéppontok 12-elemű orbitot alkotnak, az élek többi pontjai 24-elemű orbitokban vannak, a lapközéppontok egy 6-elemű orbitot alkotnak, a lapátlók és a lapok középvonalainak eddig nem vizsgált pontjai 24-elemű orbitokban vannak, a lapok többi pontja pedig 48-eleműekben.

2. *Bizonyítsuk be, hogy egy legalább két elemen ható tranzitív csoporthatásban van fixpontmentes elem.*

Megoldás: A Burnside-lemma szerint a fixpontok átlaga itt 1, viszont az egységelemnek minden pont fixpontja, tehát $|Fix(1)| > 1$, így kell lenni olyan $g \in G$-nek, amelynek a fixpontszáma 1-nél kisebb, azaz amely fixpontmentes.

3. *Hányféleképpen tudjuk feketére színezni egy 3×3-as négyzetháló (táblázat) három kis négyzetét, ha azonosaknak tekintjük azokat a színezéseket, amelyeket forgatással vagy tükrözéssel megkaphatunk egymásból? És ha csak a forgatással egymásba vihető színezéseket tekintjük azonosnak?*

Megoldás: Azt kell megszámolnunk, hogy az összes (azaz $\binom{9}{3} = 84$) színezésen a négyzet D_4 szimmetriacsoportjának, illetve a forgatások által alkotott $\langle f \rangle \cong C_4$ csoportnak hány orbitja van. Ehhez a Burnside-lemma szerint elég a csoportelemek fixpontszámát meghatározni.
$|Fix(1)| = 84$, $|Fix(f)| = |Fix(f^{-1})| = 0$ (ugyanis ha kiszínezünk egy nem középső négyzetet, akkor legalább 4 színezett négyzetnek kell lennie) $|Fix(f^2)| = 4$ (mert a 4 középpontosan tükrös négyzetpárból egyet kell kiválsztani a középső mellé), az átlóra való tükrözések fixpontszáma $1 + 3 \cdot 3 = 10$ (vagy a három átlón levőn négyzetet választjuk,

vagy egyet az átlóról, és az egyik oldalon levő három kis négyzet közül is egyet választunk ki, meg a másik oldali tükörképét), és a középvonalra való tükrözésekre is ugyanígy 10-et kapunk, mert ott is 3 kis négyzet van a tengelyen, és $3-3$ a két oldalán. Tehát a fixpontok átlaga a teljes diédercsoportnál $\frac{1}{8}(84+2\cdot 0+4+4\cdot 10)=16$, a forgatások csoportjánál pedig $\frac{1}{4}(84+2\cdot 0+4)=22$. Tehát a lényegesen különböző színezések száma a két esetben 16, illetve 22.

4. *Bizonyítsuk be, hogy egy kocka egybevágóságainak csoportja izomorf $S_4 \times C_2$-vel!*

Megoldás: Legyen G az egybevágósági csoport. Láttuk az 1. feladatban, hogy $|G|=48$. Tekintsük G hatását a 4 testátlón: $\varphi : G \to S_4$. Ez egy S_4-be menő homomorfizmus, amelynek magja csak az egységelemből és a középpontos tükrözésből áll, ha ugyanis egy egybevágóság helyben hagyja az összes testátlót, akkor legföljebb a testátló két csúcsát cserélheti meg. De ha az egyik csúcsot helyben hagyja, akkor annak az élszomszédait az élszomszédokba viszi, tehát a többi testátlót sem fordíthatja meg. Ha pedig az egyiket megfordítja, akkor ugyanezért a többit is megfordítja. Legyen Z ez a kételemű mag. Ez nyilván normálosztó, sőt centrális, mert egy kételemű normálosztó szükségképpen centrális. Mivel $\operatorname{Im}\varphi \cong G/\operatorname{Ker}\varphi$ 24-elemű, φ szürjektív, és így $G/Z \cong S_4$.

Másrészt vehetjük G-nek azt a $\{\pm 1\}$ csoportba menő leképezését amely az irányítástartó egybevágóságokat 1-be, az irányításváltókat -1-be viszi. Ennek az N magja 24-elemű, és diszjunkt Z-től. A rendek miatt $G=N\times Z$, s mivel $S_4 \cong G/Z=(N\times Z)/Z \cong N$, azt kaptuk, hogy $G \cong S_4 \times C_2$.

5. *Keressünk minimális fokú tranzitív, ill. nem feltétlenül tranzitív hűséges permutációreprezentációt a következő csoportokhoz!*

a) C_{10} *b)* D_6 *c)* $\langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle \cong C_5 \rtimes C_4$, *ahol* $a^b=a^2$

Megoldás: a) A legkisebb olyan n-et kell megkeresnünk, amelyre S_n-ben van 10-edrendű elem. Ennek a ciklusfelbontásában vagy van 10-edrendű, vagy van egy másod- és egy ötödrendű ciklus, így $n \ge 7$, és S_7-ben $\langle (12345)(67)\rangle \cong C_{10}$. Ez a hatás nem tranzitív: egy tranzitív ciklikus csoport generátora csak egyetlen ciklusból állhat, tehát ha ez a csoport 10-edrendű, akkor a generátor egy 10-ciklus. Így nem tranzitívra 7, tranzitívra 10 a csoporthatás minimális foka.

b) S_4-ben nincs hatodrendű elem (ahhoz $n \ge 3+2=5$ kellene), így $n \ge 5$. S_5-ben van hatodrendű elem, pl. $a=(123)(45)$, és ehhez a $b=(13)$ olyan másodrendű (diszjunkt részcsoportot generáló) elem, amivel való konjugálás invertálja a-t, tehát D_6-tal izomorf csoportot generálnak. Ez a hatás azonban nem tranzitív, $\{1,2,3\}$ és $\{4,5\}$ az orbitjai. Nem is létezhet S_5-be menő tranzitív csoporthatása, mert S_n minden tranzitív részcsoportjának a rendje osztható n-nel. D_6 természetes módon megjelenik az S_6-ban (a szabályos hatszög csúcsain való hatással), és ez tranzitív hatás. Tehát nem tranzitívra $n=5$, tranzitívra $n=6$ a minimum.

c) Mivel S_n-ben kell egy ötödrendű elemnek lennie, $n \ge 5$. Másrészt $H=\langle b\rangle$ nem tartalmaz normálosztót ($a^{-1}b^2a=b^2b^{-2}a^{-1}b^2a=b^2(b^{-2}ab^2)^{-1}a=b^2(a^4)^{-1}a=b^2a^2 \notin \langle b\rangle$), ezért a H mellékosztályain való hatás hűséges, tranzitív csoporthatás. Így $n=5$ a válasz mindkét részfeladatra. (Konkrétabban, $a \mapsto (12345)$ és $b \mapsto (2354)$ hűséges, tranzitív csoporthatás.)

6. *Tekintsük az S_5 hatását a konjugálással az 5-Sylowjain! Bizonyítsuk be, hogy ez az S_5-nek olyan beágyazását adja S_6-ba, ahol S_5 képének harmadrendű elemei fixpontmentesek. Tehát S_6-nak van 6 indexű részcsoportja a stabilizátorokon kívül.*

Megoldás: $|Syl_5(S_5)|=6$, mert 5-tel osztva 1 maradékot ad, osztója 24-nek, és nyilván nem 1. Így az 5-Sylowokon a konjugálással való hatás valóban S_6-ba képez. Harmadrendű elem nem lehet egy 5-Sylow normalizátorában, mert a normalizátor elemszáma $120 : 6 = 20$, így a harmadrendű elemek fixpontmentesen hatnak az 5-Sylowokon. Végül a hatás hűséges, mert S_5-nek csak S_5 és A_5 a nem triviális normálosztói, és ezek tartalmaznak harmadrendű elemet, tehát nem normalizálhatnak 5-Sylowot.

7. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy* 60*-adrendű csoportban van* 15*-ödrendű elem, akkor az* 5*-Sylow normálosztó* G*-ben. Hány* 15*-ödrendű elem lehet a csoportban? Adjunk példát is mindegyik esetre!*

Megoldás: Legyen $o(g) = 15$, és $P_5 = \langle g^3 \rangle$. Ekkor $P_5 \in Syl_5(G)$, és $g \in N_G(P_5)$. Így $|Syl_5(G)| = |G : N_G(P_5)| \mid 4$, viszont 5-tel osztva 1 maradékot ad, tehát $|Syl_5(G)| = 1$, azaz $P_5 \triangleleft G$.

Bármely harmadrendű h elem a P_5-tel együtt 15-ödrendű részcsoportot generál: $|\langle h, P_5\rangle| = |\langle h\rangle P_5| = \frac{|\langle h\rangle|\cdot|P_5|}{|\langle h\rangle \cap P_5|} = 15$, és 15-ödrendű csoportban 3- és 5-Sylowból is csak egy lehet, tehát ez a csoport $\cong C_3 \times C_5 \cong C_{15}$. Ebben a csoportban egyetlen harmadrendű részcsoport van, ezért a G különböző 3-Sylowjai különböző 15-ödrendű ciklikus csoportot generálnak P_5-tel (és persze minden 15-ödrendű ciklikusban benne van G egy 3-Sylowja), tehát a 15-ödrendű ciklikus részcsoportok száma $|Syl_3(G)|$, és a 15-ödrendű elemeké ennek $\varphi(15) = 2 \cdot 4 = 8$-szorosa (a C_{15} generátorelemei). $|Syl_3(G)| \equiv 1 \pmod 3$, és $|Syl_3(G)| \mid 20$, tehát $|Syl_3(G)| = 1$, 4 vagy 10, és így a 15-ödrendű elemek száma 8, 32 vagy 40. Az elsőre példa a C_{60} ciklikus csoport, a másodikra $A_4 \times C_5$, az utolsó eset viszont nem lehetséges, mert ott a 10 darab 3-Sylow is lefedne még 21 elemet, és ez együtt már több, mint a G elemszáma. Tehát egy 60-adrendű csoportban 0, 8 vagy 32 darab 15-ödrendű elem lehet. (0-ra példa az A_5.)

8. *Hány nem izomorf* 12*-edrendű csoport van? Keressünk mindegyikhez vele izomorf permutációcsoportot!*

Megoldás: Ha a csoport kommutatív, akkor $C_3 \times C_2 \times C_2$-vel vagy $C_3 \times C_4$-gyel izomorf. Most tegyük fel, hogy $|G| = 12$, és G nem kommutatív.

Először belátjuk, hogy G valamelyik Sylowja normálosztó. Valóban, mivel $|Syl_3(G)| \equiv 1 \pmod 3$ és $|Syl_3(G)| \mid 4$, a 3-Sylowok száma 1 vagy 4. Ha 1, akkor a 3-Sylow normálosztó, ha 4, akkor — minthogy a 3-Sylowok prímrendűek, így diszjunktak — G-ben pontosan $2 \cdot 4 = 8$ harmadrendű elem van, és a maradék $12 - 8 = 4$ elemű halmazba csak egy 2-Sylow fér, így ekkor a 2-Sylow normálosztó. A Sylowok rendjéből következik, hogy mindegyik kommutatív, és a 3-Sylow csak C_3-mal, a 2-Sylow csak C_4-gyel vagy $C_2 \times C_2$-vel lehet izomorf.

Ha a 3-Sylow normálosztó, akkor $G = P_3 \rtimes P_2$ (ahol P_3 a 3-Sylow, és P_2 az egyik 2-Sylow), mert diszjunktak, és a generátumuk 3-mal és 4-gyel is osztható, tehát csak az egész G lehet. A $P_3 \cong C_3$ csoport egyetlen nemtriviális automorfizmusa az invertálás. Tehát ha $P_3 = \langle a\rangle$ és $P_2 = \langle b\rangle \cong C_4$, akkor $a^b = a^{-1}$. Ha $P_2 \cong C_2 \times C_2$, akkor a $P_2 \to \mathrm{Aut}(C_3)$ homomorfizmus magja 2-elemű (legyen $\langle b\rangle$), és annak van komplementuma $C_2 \times C_2$-ben (legyen $\langle c\rangle$), tehát $\langle b, c\rangle$ hatása $P_3 = \langle a\rangle$-n: $b^{-1}ab = a$, és $c^{-1}ac = a^{-1}$.

Ha a 2-Sylow normálosztó, és $P_2 \cong C_4$, akkor $\mathrm{Aut}(C_4) \cong C_2$ miatt egy $P_3 \to \mathrm{Aut}(C_4)$ homomorfizmus csak triviális lehet, tehát ekkor G kommutatív lenne. Viszont ha $P_2 \cong C_2 \times C_2$, akkor egy harmadrendű automorfizmus a három másodrendű elemet csak ciklikusan permutálhatja, tehát a generátorelemeket alkalmasan megválasztva a szemidirekt szorzat $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \rtimes \langle c\rangle$, ahol $a^c = b$ and $b^c = ab$. Tehát három nemkommutatív 12-elemű csoportot találtunk, amelyek nyilván nem izomorfak egymással, mert a 2-, illetve 3-Sylowok száma, illetve izomorfiatípusa különbözik.

A kommutatívakhoz $\langle(12),(34),(567)\rangle$ és $\langle(1234),(567)\rangle$, a másik háromhoz rendre $\langle(123),(13)(4567)\rangle$, $\langle(123),(13),(45)\rangle$ és A_4 megfelelő permutációcsoportok.

Legyen $\Omega^{(k)} = \{(\alpha_1,\dots,\alpha_k) \mid \alpha_1,\dots,\alpha_k \in \Omega$ *különbözők*$\}$. *Egy* Ω*-n ható permutációcsoport vagy csoporthatás* k*-tranzitív, ha tranzitív az* $\Omega^{(k)}$ *halmazon.*

9. *Lássuk be, hogy* $|\Omega| \geq k$*-ra* $G \leq S_\Omega$ *akkor és csak akkor* k*-tranzitív, ha* G *tranzitív, és* G_α $(k-1)$*-tranzitív az* $\Omega \setminus \{\,\alpha\,\}$*-n valamely/bármely* $\alpha \in \Omega$*-ra!*

Megoldás: Tegyük fel, hogy G k-tranzitív. Ekkor nyilván tranzitív is (az előírt $\alpha \mapsto \beta$ megfeleltetést kiegészíthetjük tetszőlegesen két k-as közötti megfeleltetéssé), és G_α $(k-1)$-tranzitív tetszőleges α-ra, mert egy $(\alpha,\alpha_2,\dots,\alpha_k)$ k-ast át lehet vinni egy $(\alpha,\beta_2,\dots,\beta_k)$ k-asba, ha $\{\,\alpha_2,\dots,\alpha_k\,\}$ és $\{\,\beta_2,\dots,\beta_k\,\}$ $(k-1)$-elemű részhalmazok $\Omega \setminus \{\,\alpha\,\}$-ban.

Most tegyük fel, hogy G tranzitív, és G_α $(k-1)$-tranzitív valamely α-ra, továbbá legyenek $\{\,\alpha_1,\dots,\alpha_k\,\}$ és $\{\,\beta_1,\dots,\beta_k\,\}$ k-elemű részhalmazok Ω-ban. A tranzitivitás miatt van olyan $g,h \in G$, hogy $g : \alpha_1 \mapsto \alpha$ és $h : \alpha \mapsto \beta_1$, továbbá G_α $(k-1)$-tranzitivitása miatt van olyan $x \in G_\alpha$, amelyre $\alpha_i gx = \beta_i h^{-1}$ $\forall i \in \{\,2,\dots,k\,\}$. Így $\alpha_1(gxh) = \alpha xh = \alpha h = \beta_1$, és $\alpha_i(gxh) = (\alpha_i g)xh = (\beta_i h^{-1})h = \beta_i$ $\forall i \in \{\,2,\dots,k\,\}$.

10. *Milyen* n *és* q *esetén lehet a* $V = \mathbb{F}_q^n$ *vektortér* $AGL(V) = \{\,x \mapsto Ax + b \mid A \in GL(V),\ b \in V\,\}$ *affin csoportja* k*-tranzitív valamely* $k > 2$*-re?*

Megoldás: G tranzitív, mert tetszőleges $a,b \in V$-re $a \mapsto aI + (b-a) = b$. A 0 vektor stabilizátora $G_0 = GL(V)$. G_0 tranzitív $V \setminus \{\,0\,\}$-n, ugyanis tetszőleges $a,b \neq 0$ vektorokat ki lehet egészíteni egy-egy bázissá, és van olyan invertálható transzformáció, ami az egyik bázist a másikba viszi. Így G mindig 2-tranzitív.

G_0 nem lehet 2-tranzitív, ha $n > 1$ és $|K| > 2$, mert akkor $u,v \in V$ független vektorokra, és $\lambda \in K \setminus \{\,0,1\,\}$ skalárra az $(u,\lambda u)$ összefüggő párt nem tudjuk az (u,v) független párba képezni lineáris transzformációval.

Ha $n = 1$ és $|K| > 3$, akkor sem lehet G_0 2-tranzitív, mert akkor van $\lambda \neq \mu \in K \setminus \{\,0,1\,\}$, és egy $0 \neq v \in V$ vektorra a $(v,\lambda v)$ párt nem képezhetjük a $(v,\mu v)$ párba.

Ha $n = 1$ és $|K| = 3$, akkor $|V| = |K| = 3$, és G 3-tranzitív, mert $GL(V)$ 2-tranzitív $((1,-1) \xmapsto{\cdot 1} (1,-1)$ és $(1,-1) \xmapsto{\cdot(-1)} (-1,1))$.

Ha $|K| = 2$, és $n \geq 2$, akkor G_0 2-tranzitív, mert minden $u \neq v$ nem nulla vektor független is, és egy (u_1,u_2) független vektorpárt át lehet vinni egy tetszőleges (v_1,v_2) független vektorpárba úgy, hogy mindegyiket tetszőlegesen kiegészítjük bázissá. Tehát ilyenkor G 3-tranzitív. Viszont ha $n > 2$, akkor G_0 3-tranzitív már nem lehet, mert $u,v,w \in V$ független vektorokra az $(u,v,u+v)$ összefüggő vektorhármast nem képezhetjük az (u,v,w) független vektorhármasba.

Végül ha $|K| = 2$ és $n = 2$, akkor $|V| = 4$, és ezen G 4-tranzitívan hat, mert tetszőleges, 3 különböző nemnulla vektorból álló (u_1,u_2,u_3) és (v_1,v_2,v_3) vektorhármasra $u_3 = u_1 + u_2$ és $v_3 = v_1 + v_2$, tehát az $A : u_1 \mapsto v_1$, $u_2 \mapsto v_2$ invertálható transzformációra $A : u_3 \mapsto v_3$.

Összefoglalva: G 4-tranzitív, ha $n = 2$ és $|K| = 2$,
3-tranzitív (de nem 4-tranzitív), ha $n = 1$ és $|K| = 3$ vagy $n \geq 3$ és $|K| = 2$,
és minden más esetben csak 2-tranzitív.

Hf1. *Hányféleképpen lehet egy* 4×4*-es kis négyzetből álló négyzetben négy mezőt beszínezni, ha az elforgatással vagy tükrözéssel egymásba vihető színezéseket azonosnak tekintjük?*

Hf2. *Legyen* G *véges csoport, és* $H \leq G$ p*-részcsoport. Bizonyítsuk be, hogy* G*-ben a* H *részcsoportot tartalmazó* p*-Sylowok száma* $\equiv 1 \pmod p$*, és a* H*-t normálosztóként tartalmazó* p*-Sylowok száma is (ha van ilyen)* $\equiv 1 \pmod p$*.*