

Csoportelméleti alapok

A sorszámok a 2021-es Algebra 1 gyakorlat feladatsoraira utalnak (ld. a régi fél éveknél), kivéve az R jelűeket, amelyek a 2018-asra.

2021-ben az előadáshoz igazodva a C_n jelölés helyett Z_n -et használtam a multiplikatívan írt ciklikus csoportokra, és az n -edfokú diédercsoportot (a szabályos n -szög szimmetriacsoportját) az elemrend alapján nem D_n -nel, hanem D_{2n} -nel jelöltük.

- Alapfogalmak és alappéldák
 - Számolás permutációkkal: ciklusfelbontás; szorzás, hatványozás, konjugálás, paritás eldöntése, elemrend a ciklusfelbontás alapján. 3/1,2,3,4, R4/6
 - Konjugáltosztályok, elemek centralizátora, speciálisan S_n -ben és A_n -ben. 4/5
 - Szimmetriacsoportok, D_n , számolás D_n -ben. 2/5, 4/6,7
 - Ciklikus csoport elemrendjei, részcsoporthatóságok. 2/4, 4/1.a), R4/4
- Csoport szerkezete, konstrukciók
 - Csoport, részcs csoport, normálosztó, mellékosztályok, komplexusszorzat, és ezek elemszámával, illetve az elemrendekkel kapcsolatos tételek. 1/3,4,7, 2/2
 - Homomorfizmus és izomorfizmus, mag, kép, homomorfizmustétel.
 - Faktorcs csoport, faktorcs csoport elemeinek rendje, részcs csoport, ill. normálosztó képe a faktorizálásnál, izomorfizmustételek. 5/2,3,4
 - Direkt szorzat, direkt szorzat elemeinek rendje. 6/4,5
- Permutációcsoportok
 - tranzitivitás 6/11
 - csoportthatóságok (konjugálás elemeken, ill. részcs csoportokon, jobbszorzás a jobb mellékosztályokon) 7/1,2
- Sylow-tételek, p -Sylowok száma 7/5,6, R5/12
 - $|Syl_p(G)| \equiv 1 \pmod{p}$
 - $|Syl_p(P)| \mid |G : P|$
 - Sylow normálosztó keresése
 - $|Syl_p(G)| \stackrel{?}{=} 1$
 - elemszámláló módszer, ha $|Syl_p(G)| = |G : P|$ és a Sylow prímrendű
- Kommutátor-részcs csoport 8/3
 - $G' = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle$
 - G a legkisebb normálosztó, amelynek a faktora Abel-csoport
- Normálláncok, feloldhatóság 8/7, R7/4
 - G feloldható \Leftrightarrow van Abel faktorú normállánc
 - G feloldható, ha a kommutátorlánc leér az 1-ig
 - $N \triangleleft G$ esetén G feloldható $\Leftrightarrow N$ és G/N feloldható
 - kompozíciólánc (véges feloldhatóra minden kompozíciófaktor prímrendű ciklikus)
- Normálosztó keresése (ld. korábban: 7/2,5,6, R7/4)
 - van-e Sylow normálosztó?
 - homomorfizmus magja (pl. csoportthatóság, spec. kis indexű részcs csoport mellékosztályain való jobbszorzások mint csoportthatóságnak a magja)
- Véges Abel-csoportok
 - kanonikus alak (prímhatványrendű ciklikusok direkt szorzata)
 - elemrendek, adott rendű elemek száma 9/8,9
- Véges p -csoportok 8/3c),8
 - $|G| = p^n > 1 \Rightarrow Z(G) \neq 1$
 - Tetsz. G -re: ha $G/Z(G)$ ciklikus, akkor G Abel. 8/2
 - $|G| = p^2 \Rightarrow G$ Abel.