

1. Adjunk példát olyan  $L$  hálóra, és annak egy  $S$  részhalmazára, hogy  $S$  nem részháló  $L$ -ben, de az  $L$ -en természetesen definiált részbenrendezés  $S$ -re való megszorítása az  $S$ -en is hálót definiál. Hány elemű a legkisebb ilyen  $L$ ?
2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges részben rendezett halmazban teljesül az  $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$  asszociativitási tulajdonság (és ugyanez az egyesítésre is) mindazokra az  $a, b, c$  elemekre, amelyekre mindkét oldal értelmezve van.
3. a) Bizonyítsuk be, hogy egy véges hálónak mindig van legkisebb és legnagyobb eleme, de végtelen hálóra ez nem feltétlenül igaz.  
b) Bizonyítsuk be, hogy ha egy részbenrendezett halmaznak van legnagyobb eleme, és az elemek minden nem üres részhalmazának van legnagyobb alsó korlátja, akkor minden nem üres részhalmaznak van legkisebb felső korlátja, és így a részbenrendezés (teljes) hálót definiál.
4. Rajzoljuk föl az összes
  - a) 3- és 4-elemű részbenrendezett halmazt;
  - b) legföljebb 5-elemű hálót
 izomorfia erejéig.

Egy  $L$  háló moduláris, ha minden  $a, b, c \in L$ -re  $a \geq c$  esetén  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ .  
A disztributív hálók nyilván modulárisak is.

5. Bizonyítsuk be, hogy  $N_5$  nem moduláris, és fordítva, ha  $L$  nem moduláris, azaz valamely  $a, b, c$  elemekre nem teljesül a fenti összefüggés, akkor az  $a \wedge (b \vee c)$ ,  $(a \wedge b) \vee c$  és  $b$  elemek egy  $N_5$ -tel izomorf részhálót generálnak.
6. Rajzoljuk fel a következő csoportok részcsoporthálóját! Jelöljük meg bennük a normál-osztókat!
  - a)  $C_4, C_{32}, C_2 \times C_2, C_{54}$ ;
  - b) a  $Q$  kvaterniócsoport;
  - c)  $A_4$ .
 Amelyik nem moduláris, vagy moduláris ugyan, de nem disztributív, abban mutassunk  $N_5$ -tel, illetve  $M_3$ -mal izomorf részhálót.
7. Bizonyítsuk be, hogy egy csoport részcsoporthálója pontosan akkor véges, ha a csoport véges!
8. Határozzuk meg az összes olyan csoportot, amelynek a részcsoporthálója  $M_2, M_6$ , illetve  $M_7$ , ahol  $M_n$  azt az  $(n + 2)$ -elemű hálót jelöli, amelynek  $n$  közbülső eleme páronként összehasonlíthatatlan.

**Hf1.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy hálóban minden  $a, b, c$  elemre teljesül az

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

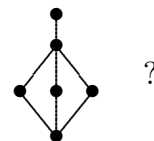
disztributív azonosság, akkor a duálisa,

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

is teljesül minden  $a, b, c$ -re.

**Hf2.** a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy véges csoportnak egyetlen maximális részcsoporthálójának van, akkor az ciklikus!

b) Van-e olyan csoport, amelynek a részcsoporthálója



?

c) És olyan, amelynek ez a háló részhálójává?