1. Bizonyítsuk be, hogy egy p^n elemű csoport feloldhatósági hossza legföljebb $[\frac{n+1}{2}]$.

2. Bizonyítsuk be, hogy egy nilpotens csoportban (és így minden véges p-csoportban is) minden nem triviális normálosztó metszi a centrumot!

3. Bizonyítsuk be, hogy ha G véges, nem kommutatív p-csoport, akkor G/G' nem lehet ciklikus. (Útmutatás: használjunk teljes indukciót G rendjére, és tekintsük a $G/(G' \cap Z(G))$ csoportot.)

4. Bizonyítsuk be, hogy a H és N csoportok külső szemidirekt szorzata (a H és N Descartes szorzata a $(h,n)(h',n') = (hh', n^{h'\varphi}n')$ szorzással, ahol $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ homomorfizmus) valóban csoport. Továbbá, hogy az így kapott csoport egy H-val izomorf részcsoportjának és egy N-nel izomorf normálosztójának belső szemidirekt szorzata.

5. Határozzuk meg a következő 2-csoportok alsó és felső centrálláncát.
a) az S_6 csoport 2-Sylowja
b) $Q \rtimes C_2 = \langle i, j \rangle \rtimes \langle a \rangle$, ahol $i^a = j$ és $j^a = i$ (lássuk is be, hogy van ilyen szemidirekt szorzat)

6. Legyen $x, y \in G$. Bizonyítsuk be, hogy
a) $[x, y] = [y, x]^{-1}$;
b) $yx = xy[y, x]$;
c) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$ és $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha p páratlan prím, és G p^3-rendű nem kommutatív csoport, akkor $Z(G) = G' \cong C_p$, és G előáll egy p^2-rendű normálosztó és egy p-edrendű részcsoport szemidirekt szorzataként. (Útmutatás: a Hf1 feladat segítségével lássuk be, hogy G-nek nemcsak egy p-edrendű részcsoportja van.)

8. Bizonyítsuk be, hogy páratlan p prímre (is) öt különböző p^3-rendű csoport van izomorfia erejéig. Adjuk meg a nemkommutatív csoportokat szemidirekt szorzatként.

9. a) Bizonyítsuk be, hogy egy p^n rendű csoport nilpotenciaosztálya legföljebb $n-1$.
b) Lássuk be, hogy a 2^n rendű $D_{2^{n-1}}$ diédercsoport nilpotenciaosztálya pontosan $n-1$.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy ha $G' \leq Z(G)$, akkor bármely $x, y \in G$-re és n pozitív egész számra $(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{2}}$.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy egy $S_3 \rtimes C_5$ szorzat csak direkt szorzat lehet! (Útmutatás: hogyan hathat a C_5 generátorelemével való konjugálás S_3-on?)