1. *Bizonyítsuk be, hogy S_n és A_n kommutátorrészcsoportja is A_n, ha $n \geq 5$.*

Megoldás: $S_n/A_n \cong C_2$ miatt $A_n \geq S_n'$, másrészt tudjuk, hogy $n \geq 5$-re A_n egyszerű, és S_n-nek A_n az egyetlen valódi, nemtriviális normálosztója, továbbá $S_n/1 = S_n$ nemkommutatív, ezért S_n' csak A_n lehet. A_n sem kommutatív, így a két normálosztója közül csak A_n lehet a kommutátor-részcsoportja.

Az A_n egyszerűségének felhasználása nélkül is könnyen bebizonyíthatjuk, hogy $S_n' = A_n$: $(123) = (13)(23) = (13)^{-1}(13)^{(12)} = [(13),(12)] \in S_n'$, és átszámozással azt kapjuk, hogy A_n minden 3-ciklusa kommutátorelem S_n-ben, ezek pedig kigenerálják A_n-et. (Ehhez még az $n \geq 5$ feltétel sem kell, elég, hogy $n \geq 3$.) Sőt, $n \geq 5$-re A_n-ben is előállíthatjuk kommutátorelemként a 3-ciklusokat: $(123) = (13)(45) \cdot (23)(45) = ((13)(45))^{-1}((13)(45))^{(132)} = [(13)(45),(132)] \in A_n'$, tehát $A_n' = A_n$ is teljesül.

2. *Mutassuk meg, hogy egy $H \leq G$ részcsoportra $[H, G'] = 1$ esetén $[H', G] = 1$.*

Megoldás: Vegyük észre először, hogy $h \in H$ és $x, y \in G$ esetén $h^{xy} = h^{yx}$, ugyanis $(h^{xy})^{(yx)^{-1}} = h^{(xy)(yx)^{-1}} = h^{[x^{-1},y^{-1}]} = h$, mivel $[H, G'] = 1$. Most legyen $h, k \in H$ és $x \in G$. Ekkor $[h,k]x = h^{-1}k^{-1}hkx = h^{-1}xx^{-1}k^{-1}\underline{h}kx = h^{-1}x\underline{k}^{-1}x^{-1}hxk = xh^{-1}k^{-1}hx^{-1}xk = xh^{-1}k^{-1}hk = x[h,k]$, ahol két alkalommal az aláhúzott H-beli elemre alkalmaztuk az első észrevételt. Tehát a H minden $[h,k]$ kommutátoreleme benne van $Z(G)$-ben, így maga H' is, azaz $[H', G] = 1$.

3. *Bizonyítsuk be, hogy minden véges csoportnak van egy legnagyobb (azaz minden más ilyet tartalmazó) feloldható normálosztója.*

Megoldás: Mivel a csoport véges, van maximális feloldható normálosztója, legyen ez N. Ekkor tetszőleges M feloldható normálosztóra $MN/N \cong M/(M \cap N)$ feloldható, mert M faktora, és N is feloldható, így MN is feloldható. Viszont $MN \geq N$, így az N maximalitása miatt $MN = N$, azaz $M \leq N$.

4. *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_3$ test fölötti 3×3-as invertálható felső háromszögmátrixok csoportjának kommutátorláncát, és a kommutátorlánc faktorainak izomorfiatípusát.*

Megoldás: Legyen G a $\mathbb{Z}_3$ fölötti invertálható felső háromszögmátrixok csoportja, és $N \leq G$ ezek közül azoknak a halmaza, amelyeknek az átlójában csak 1-ek vannak. Mivel két háromszögmátrix szorzatának átlójában a megfelelő diagonális elemek szorzata áll, $N \triangleleft G$. Továbbá N mellékosztályainak teljes reprezentánsrendszerét adja a diagonális mátrixok H részcsoportja, így $G/N \cong H \cong C_2 \times C_2 \times C_2$ Abel-csoport. Ebből következik, hogy $G' \leq N$. Viszont a 27-elemű N normálosztót kigenerálják a kommutátorelemek, mert pl. $D_1 = \mathrm{diag}(-1,1,1)$-re, $D_2 = \mathrm{diag}(1,-1,1)$-re és

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\text{-re}\quad [A, D_1] = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \text{és}\quad [A, D_2] = \begin{bmatrix} 1 & a & -ac \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és ezek legalább $9 + 6 = 15$ különböző mátrixot adnak, így $|G'| \mid |N| = 27$ miatt $G' = N$. Könnyen látható, hogy N nem-Abel 3-csoport, így $|G''| = |N'| = |Z(N)| = 3$, és $G''' = 1$. A faktorok $C_2 \times C_2 \times C_2$, $C_3 \times C_3$ (ugyanis $N/Z(N)$ nem lehet ciklikus) és C_3. (Mellesleg, $Z(N)$ azokból a mátrixokból áll, amelyeknek a diagonális 1-eken kívül csak a jobb fölső sarokban lehet nemnulla eleme.)

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy G feloldható csoport feloldhatósági hosszát $s(G)$-vel jelöljük, akkor $N \lhd G$-re $\max(s(N), s(G/N)) \leq s(G) \leq s(N) + s(G/N)$. Mutassunk példát arra, amikor valamelyik egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül.*

Megoldás: Mivel G kommutátorlánca leér $s(G)$ lépésben, az n-nek ez alatt haladó kommutátorlánca, illetve az N/G kommutátorlánca, ami a G-ének homomorf képe szintén leér ennyi lépésben. Másrészt ha $s(N) = k$ és $s(G/N) = \ell$, akkor $G^{(\ell)} \leq N$, és így $G^{(\ell+k)} \leq N^{(k)} = 1$, tehát $s(G) \leq k + \ell$.

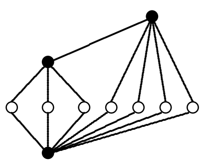
Az alsó egyenlőtlenség egyenlőség például akkor, ha $G = N \times H$ direkt szorzat, mert $(N \times H)^{(i)} = N^{(i)} \times H^{(i)}$ minden i-re. A felső egyenlőtlenség egyenlőség például akkor, ha $N = G^{(i)}$ valamely i-re.

6. *Bizonyítsuk be, hogy ha p, q prímek, akkor minden pq, pq^2, illetve pq^3 rendű csoport feloldható.*

Megoldás: Feltehető, hogy $p \neq q$ prímek.
Legyen $|G| = pq$, és tegyük fel, hogy $p > q$. Ekkor $|\operatorname{Syl}_p(G)| \equiv 1 \pmod p$ és $|\operatorname{Syl}_p(G)| \mid q$ miatt $|\operatorname{Syl}_p(G)| = 1$, azaz $P \in \operatorname{Syl}_p(G)$-re $P \lhd G$. Mivel $P \cong C_p$ és $G/P \cong C_q$ feloldhatók, G is az.
Legyen $|G| = p^2q$. Ha $p > q$, akkor az előző esethez hasonlóan $P \lhd G$, és a P p-csoport és G/P q-csoport feloldhatók, így G is. Ha $q > p$, akkor $|\operatorname{Syl}_q(G)|$ csak 1 vagy p^2 lehet. Az első esetben megint van Sylow normálosztónk, és ennek a faktora p-csoport, tehát kész vagyunk, a másodikban azt használhatjuk ki, hogy a q-Sylowok prímrendűek, ezért diszjunktak, tehát együtt lefednek $p^2(q-1) = p^2q - p^2$ darab q-adrendű elemet, és a maradék p^2 elemen már csak egy p-Sylow fér el. Ezért ebben az esetben is van Sylow normálosztó.
Legyen $|G| = p^3q$. A $p > q$ eset olyan, mint az előzőekben, és ha $q > p$, akkor az előző mintájára működik a $|\operatorname{Syl}_q(G)| = 1$ és $|\operatorname{Syl}_q(G)| = p^3$ eset. Az az eset marad, amikor $|\operatorname{Syl}_q(G)| = p^2$, de ekkor $p^2 \equiv 1 \pmod q$, azaz $q \mid p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \Rightarrow q \mid p+1$ $\Rightarrow q = 3$ és $p = 2$ (mivel $q > p$), vagyis $|G| = 24$. Ebben az esetben viszont a 2-Sylowok száma vagy 1, és akkor van Sylow normálosztó, vagy 3. Az utóbbi esetén hattathatjuk G-t a konjugálással a 2-Sylowokon, és így kapunk egy $\varphi : G \to S_3$ homomorfizmust. $\operatorname{Im}\varphi \neq 1$, mert a Sylowok egymásba konjugálhatók, és $\operatorname{Ker}\varphi \neq 1$, mert $|G| > |S_3|$. Tehát $N = \operatorname{Ker}\varphi$ valódi, nem triviális normálosztó G-ben, és N és G/N is olyan rendű, amilyen rendűekre már beláttuk, hogy feloldhatók.

7. *a) Rajzoljuk fel az A_4 alternáló csoport részcsoporthálóját! Hány különböző kompozíciólánca van A_4-nek?*
b) Hány különböző kompozíciólánca van a szintén 12-elemű D_6 diédercsoportnak?

Megoldás: a)

$L(A_4) \cong$ 

A fekete csúcsok jelölik A_4 normálosztóit.
Ha felülről indítjuk a kompozícióláncot, az első szem egy maximális normálosztó, ami az ábrán jól láthatóan csak a V Klein-csoport lehet. Viszont V Abel-csoport,

tehát ennek minden részcsoportja normálosztó V-ben, így innentől kezdve maximális részcsoportokat kell választani. Erre csak három lehetőség van (a három másodrendű részcsoport), így A_4-nek összesen három kompozíciólánca van (felülről lefelé C_3, C_2, C_2 faktorokkal).

b) Keressük meg a $D_6 = \langle f, t\rangle$ csoportban is a maximális normálosztókat! Ha egy N normálosztó tartalmaz egy τ (tengelyes) tükrözést, akkor az f^2-et is tartalmazza, mert $\tau^{-1}f\tau = f^{-1}$-ből $f^{-1}\tau f = \tau\tau^{-1}f^{-1}\tau f = \tau f^2$, így a normálosztó tartalmazza a $\langle\tau, f^2\rangle$ 2 indexű részcsoportot. Attól függően, hogy τ melyik tükrözés, a $\langle\tau, f^2\rangle \cong D_3$ normálosztóban levő tükrözések t, tf^2, tf^4 vagy tf, tf^3, tf^5 lehetnek, tehát két ilyen maximális normálosztót kapunk: $N_1 = \langle f^2, t\rangle$ és $N_2 = \langle f^2, tf\rangle$. Ha nincs benne tükrözés, akkor a normálosztó része a szintén 2 indexű $\langle f\rangle \cong C_6$ normálosztónak, vagyis $N_3 = \langle f\rangle$ a harmadik maximális normálosztó.
$N_1 \cong N_2 \cong D_3$-nak egyetlen maximális normálosztója van, az $\langle f^2\rangle \cong C_3$ részcsoport, így itt egyértelmű a normállánc folytatása. C_6-ban pedig két irányba indulhatunk: $\langle f^3\rangle \cong C_2$ vagy $\langle f^2\rangle \cong C_3$ lehet a következő láncszem. Ez összesen 4 különböző kompozícióláncot ad, C_2, C_2, C_3, illetve C_2, C_3, C_2 faktorokkal.

8. *Milyen π-re vannak az S_5 és S_6 szimmetrikus csoportoknak π-Hall-részcsoportjai? Melyik π-re hány π-Hall részcsoport van S_5-ben?*

Megoldás: Mivel $|S_5| = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ és $|S_6| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, a teljes és a triviális csoporton, továbbá a Sylow-részcsoportokon kívül (amelyek nyilván léteznek) csak a $2'$-, $3'$- és $5'$-Hall-részcsoportok létezését illetve az első esetben ezek számát kell megvizsgálni.
S_5-ben a 3-Sylowok és 5-Sylowok is ciklikusak, így ezek számát a harmadrendű és ötödrendű elemek számából meghatározhatjuk:

$$|\operatorname{Syl}_3(S_5)| = \left(\binom{5}{2} \cdot 2\right)/2 = 10 \quad \text{és} \quad |\operatorname{Syl}_5(S_5)| = 4!/4 = 6.$$

S_5 2-Sylowjai a $D_4 = \langle(1234), (12)(34)\rangle$ csoport konjugáltjai, amelyben csak két negyedrendű elem van, így az S_5 csoport $5 \cdot 3! = 30$ negyedrendű elemének lefedéséhez (a Sylow-tételek miatt mindegyik Sylow-részcsoportba foglalható) legalább 15 darab 2-Sylow kell. Ennél több pedig nem is lehet, mert a 2-Sylow indexe éppen 15. Tehát

$$|\operatorname{Syl}_2(S_5)| = 15.$$

Könnyen beláthatjuk, hogy $2'$-Hall- és $3'$-Hall-részcsport nincs S_5-ben, ugyanis egy 15, illetve 40 elemű csoportban az 5-Sylow normálosztó lenne ($3, 2, 4, 8$ nem 1 maradékot ad 5-tel osztva), de a korábbiak alapján S_5-ben egy 5-Sylow normálizátorának rendje $|S_5|/|\operatorname{Syl}_5(S_5)| = 120/6 = 20$, és ez nem tartalmazhat sem 15, sem 40 elemű részcsoportot.

$5'$-Hall-részcsoport viszont van, az S_4 és annak bármely konjugáltja (azaz bármely elem stabilizátora) ilyen. Vegyük észre, hogy egy 24 elemű részcsoportnak (azaz $5'$-Hall-részcsoportnak) három 2-Sylowja van, ugyanis a 2-Sylow normálizátora még S_5-ben is csak önmaga (a normalizátor mérete $|S_5|/|\operatorname{Syl}_2(S_5)| = 120/15 = 8$). S_4-ben ez a három mind tartalmazza az S_4-ben normálosztó Klein-csoportot. Így a többi 2-Sylow, ezek konjugáltja, is tartalmazza a fixpontjuk által meghatározott Klein-csoportot, amelyből nyilván öt van S_5-ben (minden ponthoz az őt fixáló $2+2$ ciklusfelbontású elemek az 1-gyel együtt). Viszont két különböző Klein-csoportot tartalmazó Sylow nem lehet egy $5'$-Hall-részcsoportban, mert ha például az 5 és a 4 fixpontú benne van egy részcsoportban, akkor az tartalmazza az $(12)(34)(13)(25) = (15234)$ elemet is, tehát a rendje 5-tel osztható. Ezzel azt kaptuk, hogy legföljebb annyi $5'$-Hall-részcsoport van S_5-ben, ahány Klein-csoport, azaz 5, és ennyi pedig van is: az egyes pontok stabilizátora ilyen.

$$|\operatorname{Hall}_{2'}(S_5)| = 0, \qquad |\operatorname{Hall}_{3'}(S_5)| = 0, \qquad |\operatorname{Hall}_{5'}(S_5)| = 5$$

Tekintsük most a $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ elemű $G = S_6$ csoportot.
Hasznos itt is megszámolni a Sylowokat. Mivel az 5-Sylowok ciklikusak, a számuk meghatározható az 5-ciklusok számából:

$$|\operatorname{Syl}_5(S_6)| = 6 \cdot 4!/4 = 36.$$

A 2-Sylowok az $\langle (1234), (12)(34) \rangle \times (56) \cong D_4 \times C_2$ csoport konjugáltjai, így mindegyikben pontosan két 4-ciklus van, és a 4-ciklusok meg is határozzák az őket tartalmazó 2-Sylowot: kigenerálják azt az egyik 4-ciklussal együtt az általa mozgatott elemekhez tartozó Klein-csoport és a fixpontjait felcserélő transzpozíció. Így

$$|\operatorname{Syl}_2(S_6)| = \binom{6}{2} \cdot 3!/2 = 45.$$

Nyilván 3-Sylow a $\langle (123), (456) \rangle \cong C_3 \times C_3$ kilencedrendű részcsoport, és a többi ennek konjugáltja, így a 3-Sylowokat meghatározza az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz egy-egy kettévágása két háromelemű halmazra, ezekből pedig $\binom{6}{3}/2 = 10$ van, tehát

$$|\operatorname{Syl}_3(S_6)| = 10.$$

(A Sylowok számolásánál felhasználtuk, hogy S_n-ben a konjugálás megtartja a ciklusszerkezetet, csak az alaphalmaz elemeit permutálja.)
Később látni fogjuk, hogy $n \geq 5$-re S_n-nek az A_n-en kívül nincs n-nél kisebb indexű részcsoportja, ezért S_6-nak nem létezhet $5'$-Hall-részcsoportja.
Egy 45-elemű csoportban az 5-Sylow szükségképpen normálosztó (az 5-Sylowok száma sem 3, sem 9 nem lehet), de ez nem fér bele a $720/36 = 20$ elemű normalizátorba. Így nincs $2'$-Hall-részcsoport.
Ha $H \leq S_6$, $|H| = 80$, akkor $|\operatorname{Syl}_5(H)| = 1$ vagy 16. Az első esetben H benne lenne az 5-Sylow S_6-beli 20-elemű normalizátorában, ami nyilván lehetetlen. A másodikban elemszámlálással arra jutunk, hogy H-ban a 2-Sylow normálosztó, viszont H nem fér bele a 2-Sylow S_6-beli $720/45 = 16$-elemű normalizátorába. Itt is ellentmondásra jutottunk. Összefoglalva:

$$|\operatorname{Hall}_{2'}(S_6)| = |\operatorname{Hall}_{3'}(S_6)| = |\operatorname{Hall}_{5'}(S_6)| = 0.$$

Hf1. *Lássuk be, hogy ha $N \lhd G$, és $N \cap G' = 1$, akkor $N \leq Z(G)$.*

Hf2. *Legyen G az* $\begin{bmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ *alakú invertálható valós mátrixok csoportja a szorzásra nézve. Határozzuk meg G kommutátor-részcsoportját!*