1. *Bizonyítsuk be, hogy egy p^n elemű csoport feloldhatósági hossza legföljebb $[\frac{n+1}{2}]$.*

Megoldás: A rendre vonatkozó teljes indukcióval bizonyítható, hogy véges p-csoportnak mindig van normálosztókból álló lánca p-edrendű faktorokkal. Tudjuk ugyanis, hogy $Z(G) \neq 1$, így $\exists g \in Z(G)$: $o(g) = p$, és $N = \langle g \rangle \lhd G$, mivel G minden eleme centralizálja. G/N-re alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, és G/N normálosztóláncának ősképe G-ben az 1-gyel együtt szintén normálosztólánc, ugyanazokkal a faktorokkal, és $N/1 \cong C_p$-vel.

Ha ebből a normálosztóláncból minden második elemet vesszük, akkor olyan normálosztóláncot kapunk, amelynek a faktorai p^2-rendűek (és legföljebb egy p-edrendű), ezért kommutatívak. Ebből következik, hogy a kommutátorlánc is legföljebb ilyen hosszú, azaz a feloldhatósági hossz legföljebb a megritkított lánc hossza, $[\frac{n+1}{2}]$.

2. *Bizonyítsuk be, hogy egy nilpotens csoportban (és így minden véges p-csoportban is) minden nem triviális normálosztó metszi a centrumot!*

Megoldás: Legyen $1 < Z_1 < \ldots < Z_{k-1} < Z_k = G$ centrállánc, és $1 \neq N \lhd G$, továbbá tegyük fel, hogy i a legnagyobb olyan index, amelyre $N \cap Z_i = 1$. Ekkor $[G, N \cap Z_{i+1}] \leq [G, Z_{i+1}] \leq Z_i$ a centrállánc definíciója alapján, és $[G, N \cap Z_{i+1}] \leq [G, N] \leq N$, mivel N normálosztó, így $[G, N \cap Z_{i+1}] \leq N \cap Z_i = 1 \Rightarrow 1 \neq N \cap Z_{i+1} \leq Z(G)$, és nyilván $\leq N$, tehát $Z(G) \cap N \neq 1$.

3. *Bizonyítsuk be, hogy ha G véges, nem kommutatív p-csoport, akkor G/G' nem lehet ciklikus. (Útmutatás: használjunk teljes indukciót G rendjére, és tekintsük a $G/(G' \cap Z(G))$ csoportot.)*

Megoldás: Az állítást $|G|$-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha G véges, nem kommutatív p-csoport, akkor az előbbiek alapján $1 \neq Z := G' \cap Z(G) \leq Z(G) < G$. Tekintsük a G/Z csoportot.

Ha ez kommutatív, akkor $G' \leq Z$, amiből $G' \leq Z(G)$ következik, és így G/G'-nek homomorf képe $G/Z(G) \cong (G/G')/(Z(G)/G')$, a $G/Z(G)$ faktorcsoport pedig G nem-kommutativitása miatt nem lehet ciklikus, így G/G' sem az.

Ha viszont G/Z nem-Abel, akkor alkalmazhatjuk rá az indukciós feltevést, és így $G/G' \cong (G/Z)/(G'/Z) = (G/Z)/(G/Z)'$ nem ciklikus.

4. *Bizonyítsuk be, hogy a H és N csoportok külső szemidirekt szorzata (a H és N Descartes szorzata a $(h,n)(h',n') = (hh', n^{h'\varphi}n')$ szorzással, ahol $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ homomorfizmus) valóban csoport. Továbbá, hogy az így kapott csoport egy H-val izomorf részcsoportjának és egy N-nel izomorf normálosztójának belső szemidirekt szorzata.*

Megoldás: Legyen G a feladatban definiált külső szemidirekt szorzat, $N \rtimes H$.

A G-beli szorzás asszociatív:

$((h_1,n_1)(h_2,n_2))(h_3,n_3) = (h_1h_2,\ n_1^{h_2\varphi}n_2)(h_3,n_3) = (h_1h_2h_3,\ (n_1^{h_2\varphi}n_2)^{h_3\varphi}n_3) = (h_1h_2h_3,\ n_1^{(h_2h_3)\varphi}n_2^{h_3\varphi}n_3)$

$(h_1,n_1)((h_2,n_2)(h_3,n_3)) = (h_1,n_1)(h_2h_3,\ n_2^{h_3\varphi}n_3) = (h_1h_2h_3,\ n_1^{(h_2h_3)\varphi}n_2^{h_3\varphi}n_3)$.

$(1,1)$ az egységelem:

$(1,1)(h,n) = (h, 1^{h\varphi}n) = (h, 1n) = (h,n)$ és $(h,n)(1,1) = (h, n^{1\varphi}1) = (h,n)$.

Van inverz: $(h,n)^{-1} = (h^{-1}, (n^{h^{-1}\varphi})^{-1})$:

$(h,n)(h^{-1}, (n^{h^{-1}\varphi})^{-1}) = (1, n^{h^{-1}\varphi}(n^{h^{-1}\varphi})^{-1}) = (1,1)$ és

$(h^{-1}, (n^{h^{-1}\varphi})^{-1})(h,n) = (1,\ ((n^{h^{-1}\varphi})^{-1})^{h\varphi}n) = (1,\ (n^{(h^{-1}h)\varphi})^{-1}n) = (1, n^{-1}n) = (1,1)$.

Ebben a $\tilde{H} = \{(h,1) \mid h \in H\}$ és $\tilde{N} = \{(1,n) \mid n \in N\}$ halmazok H-val, illetve N-nel izomorf részcsoportok: $(h,1)(h',1) = (hh', 1^{h'\varphi}1) = (hh',1)$ és $(1,n)(1,n') = (1, n^{1\varphi}n') = (1, nn')$, és ezekre $(h,1)(1,n) = (h, 1^{1\varphi}n) = (h,n)$ miatt $G = \tilde{H}\tilde{N}$. Az nyilvánvaló, hogy $\tilde{H} \cap \tilde{N} = 1$, tehát már csak az kell belátni, hogy $\tilde{N} \lhd G$. Ehhez elég az, hogy a $\tilde{H}$ elemei normalizálják: $(h,1)^{-1}(1,n)(h,1) = (h^{-1},1)(1,n)(h,1) = (h^{-1},n)(h,1) = (1, n^{h\varphi}1) = (1, n^{h\varphi}) \in \tilde{N}$.

5. *Határozzuk meg a következő 2-csoportok alsó és felső centrálláncát.*

a) az S_6 csoport 2-Sylowja

b) $Q \rtimes C_2 = \langle i,j \rangle \rtimes \langle a \rangle$, ahol $i^a = j$ és $j^a = i$ (lássuk is be, hogy van ilyen szemidirekt szorzat)

Megoldás: a) $|S_6| = 6!$-nak 2^4 a legnagyobb prímhatvány osztója. 2^3 rendű részcsoportot már S_4-ben is találunk (ez S_4 2-Sylowja, a D_4 diédercsoport, a négyzet négy csúcsán ható permutációcsoportnak tekintve), és ezt centralizálja az (56) transzpozíció, így együtt egy $D_4 \times C_2$-vel izomorf részcsoportot generálnak S_6-ban.

Könnyen látható, hogy két csoportra $Z(H \times K) = Z(H) \times Z(K)$, és $(H \times K)/Z(H \times K) = (H \times K)/(Z(H) \times Z(K) \cong (H/Z(H)) \times (K/Z(K)))$, tehát a felső centrállánc addigra ér fel, mire D_4 és C_2 centrállánca is felér, ez pedig a második lépés:

$$1 < Z(D_4) \times C_2 < D_4 \times C_2.$$

Kommutátorokra igaz az az összefüggés, hogy ha $H_1, H_2 \le H$ és $K_1, K_2 \le K$, akkor $[H_1 \times K_1,\ H_2 \times K_2] = [H_1, H_2] \times [K_1, K_2]$ (mivel $[(h_1,k_1),(h_2,k_2)] = ([h_1,h_2],[k_1,k_2])$). Így $K_i(D_4 \times C_2) = K_i(D_4) \times K_i(C_2)$ minden i-re. Ebből adódik, hogy $D_4 \times C_2$ ferde kommutátorlánca

$$D_4 \times C_2 > Z(D_4) \times 1 > 1,$$

vagy ezt is növekvő sorrendben felírva:

$$1 < Z(D_4) \times 1 < D_4 \times C_2.$$

Láthatjuk, hogy a felső centrállánc fölötte halad az alsónak (a ferde kommmutátorláncnak), de ugyanolyan hosszúságú.

b) A szemidirekt szorzat létezéséhez azt kell ellenőriznünk, hogy van olyan $\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$, amelyre $\sigma^2 = 1$, és $\sigma : i \mapsto j,\ \ j \mapsto i$. Mivel $k = ij$, erre a σ-ra $k \mapsto ji = -k$ kell, hogy legyen, továbbá $-1 \mapsto -1$, és így $-i, -j, -k$ képe az előbbiek negatívja. A $j, i, -k$ elemek ugyanúgy ciklikusan egymásba szorzódnak, fordítva pedig a negatívjukba, mint ahogy az i, j, k elemek, tehát ez a leképezés valóban műveletttartó lesz. Könnyen látható az is, hogy σ másodrendű.

Legyen G a feladatban szereplő szemidirekt szorzat. Határozzuk meg először a centrumot és a kommutátor-részcsoportot.

A -1-et Q és a is centralizálja, ezért $\langle -1 \rangle \le Z(G)$, másrészt a centrum nem is lehet ennél nagyobb, ugyanis $Z(G) \le N_G(\langle i \rangle) = Q$ (a nem normalizálja $\langle i \rangle$-t, tehát a normalizátor nem lehet a teljes G, de a normalizátor tartalmazza Q-t, így csak Q lehet) $\Rightarrow Z(G) \le Z(Q) = \langle -1 \rangle$, vagyis $Z(G) = \langle -1 \rangle$.

G' meghatározásához vegyük észre, hogy $[i,a] = i^{-1}i^a = -ij = -k$, így $\langle k\rangle = \langle -k\rangle \leq G'$, de $N_G(\langle k\rangle) \geq \langle Q, a\rangle = G$, tehát $\langle k\rangle \lhd G$, és a faktora 4-elemű, ezért Abel, így $G' \leq \langle k\rangle$, következésképpen $G' = \langle k\rangle$.
A felső centrállánc első tagja ezek alapján $Z_1(G) = \langle -1\rangle$, s mivel $G' \not\leq Z(G)$, a 8-elemű $G/Z_1(G)$ faktorcsoport nem Abel, így ennek a centruma csak kételemű lehet. Viszont metszenie kell a $G'/Z(G)$ normálosztót az 1. feladat szerint, tehát $Z_2(G) = G' = \langle k\rangle$. Végül $G/Z_2(G) = G/G'$ Abel, tehát $Z_3(G) = G$.
Az alsó centrállánc tagjai $K_1(G) = G$, $K_2(G) = G' = \langle k\rangle$, s mivel ez sem lehet rövidebb a felső centrálláncnál, kell bele még egy szem, és az csak a $\langle k\rangle$ egyetlen valódi részcsoportja, $\langle -1\rangle$ lehet. Azt kaptuk, hogy az alsó és a felső centrállánc is

$$1 < \langle -1\rangle < \langle k\rangle < G.$$

6. *Legyen $x, y \in G$. Bizonyítsuk be, hogy*
a) $[x,y] = [y,x]^{-1}$;
b) $yx = xy[y,x]$;
c) $[xy,z] = [x,z]^y[y,z]$ *és* $[x,yz] = [x,z][x,y]^z$.

Megoldás: a) $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy = (y^{-1}x^{-1}yx)^{-1} = [y,x]^{-1}$.
b) $yx = xy(xy)^{-1}yx = xyy^{-1}x^{-1}yx = xy[y,x]$.
c) $[xy,z] = (xy)^{-1}z^{-1}xyz = y^{-1}(x^{-1}z^{-1}x)yz = y^{-1}[x,z]z^{-1}yz = y^{-1}[x,z]yy^{-1}z^{-1}yz = [x,z]^y[y,z]$;
$[x,yz] = x^{-1}(yz)^{-1}xyz = x^{-1}z^{-1}(y^{-1}xy)z = x^{-1}z^{-1}x[x,y]z = x^{-1}z^{-1}xzz^{-1}[x,y]z = [x,z][x,y]^z$.

7. *Bizonyítsuk be, hogy ha p páratlan prím, és G p^3-rendű nem kommutatív csoport, akkor $Z(G) = G' \cong C_p$, és G előáll egy p^2-rendű normálosztó és egy p-edrendű részcsoport szemidirekt szorzataként. (Útmutatás: a Hf1 feladat segítségével lássuk be, hogy G-nek nemcsak egy p-edrendű részcsoportja van.)*

Megoldás: Mivel G nem kommutatív, nincs p^3-rendű eleme. Vegyük észre továbbá, hogy G centruma csak p-elemű lehet, mert nem triviális, és a faktora nem ciklikus. Viszont ekkor $G/Z(G)$ rendje p^2, így $G/Z(G)$ Abel-csoport, amiből $G' \leq Z(G)$, sőt, $G' \neq 1$ miatt $G' = Z(G)$ is következik.
Ha G-ben van p^2-rendű elem, legyen egy ilyen a, és $N = \langle a\rangle$. Ez az N maximális részcsoport G-ben, tehát a G nilpotenciája miatt $N \lhd G$. Ha most van olyan $b \in G\backslash N$, amely p-edrendű, akkor $H = \langle b\rangle$-re $N \cap H = 1$ és $NH > N$ miatt $NH = G$, vagyis $G = N \rtimes H$. Ha nincs ilyen b, akkor legyen $b \in G \setminus N$ p^2-rendű. $|G/N| = p$ miatt $b^p \in N$, és b^p p-edrendű, tehát van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $(k,p) = 1$, és $b^p = a^{kp}$. A Hf1. feladat szerint ekkor $c = a^kb^{-1}$-re $c^p = (a^kb^{-1})^p = a^{pk}b^{-p}[b^{-1},a^k]^{\binom{p}{2}} = a^{pk}b^{-p} = 1$, ugyanis páratlan p prímre p osztója $\binom{p}{2}$-nek, és $|G'| = p$ miatt $[b^{-1},a^k]^p = 1$. Továbbá $a^kb^{-1} \notin N$, mert $b^{-1} \notin N$, tehát mégis lenne N-en kívül p-edrendű elem, ami ellentmondás.
Végül tekintsük azt az esetet, amikor G minden nemtriviális eleme p-edrendű. Ekkor is van G-nek p^2-rendű normálosztója (az 1. feladatban láttuk, hogy minden véges p-csoportnak van p-edrendű faktorokat adó, normálosztókból álló lánca), és egy külső elem szükségképpen p-edrendű, tehát megint szemidirekt szorzatot kapunk.

8. *Bizonyítsuk be, hogy páratlan p prímre (is) öt különböző p^3-rendű csoport van izomorfia erejéig. Adjuk meg a nemkommutatív csoportokat szemidirekt szorzatként.*

Megoldás: p^3-rendű Abel-csoport a véges Abel-csoportok alaptétele szerint csak C_{p^3}, $C_{p^2} \times C_p$ és $C_p \times C_p \times C_p$ lehet.
A nemkommutatív csoportok az előző feladat szerint csak $C_{p^2} \rtimes C_p$ vagy $(C_p \times C_p) \rtimes C_p$ alakúak lehetnek. Ez a kettő nyilván nem izomorf, mert a Hf1. feladatból következik, hogy a másodikban minden nemtriviális elem p-edrendű. Belátjuk, hogy az azonos felbontásúak izomorfak is.
Legyen $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, ahol $o(a) = p^2$, $o(b) = p$, és G nem kommutatív. A szemidirekt szorzatot definiáló $\varphi : \langle b \rangle \to \mathrm{Aut}(\langle a \rangle)$ leképezést meghatározza, hogy a^b az a-nak melyik hatványával egyenlő. Ha $a^b = a^m$, akkor $o(b) = p$ miatt $m^p \equiv 1 \pmod{p^2}$. Viszont $m^p \equiv m \pmod{p}$ a kis Fermat-tétel miatt, tehát $m \equiv 1 \pmod{p}$, azaz $m = kp + 1$ valamely $0 < k < p$-re ($a^m \neq a$, mivel a csoport nem kommutatív). Viszont $kk'' \equiv 1 \pmod{p}$-re $(kp+1)^{k'} \equiv p+1 \pmod{p^2}$, így b helyett a C_p-ben a $b' = b^{k'}$ generátorelemet véve, az $a^{b'} = a^{p+1}$ hatást kapjuk. Ebből következik hogy a $C_{p^2} \rtimes C_p$ nemkommutatív csoport izomorfia erejéig egyértelmű.
Legyen most $G = \langle a, b \rangle \rtimes \langle c \rangle$, ahol $\langle a, b \rangle \cong C_p \times C_p$, és $o(c) = p$, továbbá G nem kommutatív. Legyen $N = \langle a, b \rangle$. Ez az N csoport multiplikatívan írt 2-dimenziós vektortér $\mathbb{Z}_p$ fölött, így $\mathrm{Aut}\, N \cong GL_2(p)$, a $\mathbb{Z}_p$ fölötti 2×2-es invertálható mátrixok csoportja. A szemidirekt szorzatot definiáló $\varphi : \langle c \rangle \to GL_2(p)$ leképezésnél $C := c\varphi$ olyan mátrix, amelyre $C^p = I$, és $C \neq I$, különben G kommutatív lenne. Ebből következik, hogy C minimálpolinomja osztója az $x^p - 1 = (x-1)^p$ polinomnak (a p karakterisztika miatt írható így át a polinom), tehát 1 az egyetlen sajátértéke, s mivel $C \neq I$, a C Jordan-normálalakja csak $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ lehet. Ez azt jelenti, hogy $\{ a, b \}$ helyett alkalmas $\{ a', b' \}$ bázist választva N-ben, $G = \langle a', b' \rangle \rtimes \langle c \rangle$, ahol $(a')^c = a'b'$ és $(b')^c = b'$ (jobbról írjuk a mátrixot, tehát sorvektorokon hat, és a sorai a báziselemek képeinek koordinátavektorai). Ezzel beláttuk, hogy $(C_p \times C_p) \rtimes C_p$ alakú nemkommutatív csoport is csak egy van izomorfia erejéig. Az Abel esetekkel együtt ez 5 különböző csoportot ad.

9. *a) Bizonyítsuk be, hogy egy p^n rendű csoport nilpotenciaosztálya legföljebb $n-1$.*
b) Lássuk be, hogy a 2^n rendű $D_{2^{n-1}}$ diédercsoport nilpotenciaosztálya pontosan $n-1$.

Megoldás: a) Tegyük fel, hogy $Z_0 = 1 < Z_1 < \ldots < Z_{k-1} < Z_k = G$ a fölső centrállánc. Ha $G/Z_{k-1} \cong (G/Z_{k-2})/(Z_{k-1}/Z_{k-2}) \cong (G/Z_{k-2})/Z(G/Z_{k-2})$ ciklikus, akkor G/Z_{k-2} Abel, így $Z_{k-1} = G$ lenne. Tehát G/Z_{k-1} rendje legalább p^2, a többi faktoré legalább p, így $k \leq n-1$.

b) Legyen $G = D_{2^{n-1}} = \langle f, t \rangle$, ahol f a $(2\pi)/2^{n-1}$ szögű forgatás, t pedig az egyik tükrözés. Ekkor $Z(G) = \langle f^{2^{n-2}} \rangle$, mert $(f^k)^t = f^{-k} = f^k \Leftrightarrow 2^{n-1} \mid 2k \Leftrightarrow 2^{n-2} \mid k$, tehát a forgatások közül más nem lehet a centrumban, és bármely tükrözés az f-et az inverzébe konjugálja, tehát a tükrözések is mind kívül vannak a centrumon. A $H = G/Z(G)$ csoportot generálja a 2^{n-2} rendű $\bar{f}$ és a másodrendű $\bar{t}$ elem, amelyekre $\bar{t}\bar{f}\bar{t} = \bar{f}^{-1}$, tehát $H \cong D_{2^{n-2}}$. Mivel $cl(D_4) = 2$, teljes indukcióval beláthatjuk a fenti indukciós lépés alapján, hogy $cl(D_{2^{n-1}}) = n-1$.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy ha $G' \leq Z(G)$, akkor bármely $x, y \in G$-re és n pozitív egész számra*

$(xy)^n = x^n y^n [y,x]^{\binom{n}{2}}$.

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy egy* $S_3 \rtimes C_5$ *szorzat csak direkt szorzat lehet! (Útmutatás: hogyan hathat a* C_5 *generátorelemével való konjugálás* S_3*-on?)*