1. *Legyen G a kocka egybevágósági csoportja. Ezt tekinthetjük S_8 részcsoportjának is a csúcsokon való hatással.*
a) Mi a G rendje?
b) Hány orbitja van G-nek, ha
b1) a kételemű csúcshalmazokon hattatjuk;
b2) a háromelemű csúcshalmazokon hattatjuk?
c) Hány elemű orbitjai vannak a G hatásának a kocka teljes felszínén?

Megoldás: a) Az csoport rendjét kiszámíthatjuk a $|G| = |\alpha G| \cdot |G_\alpha|$ összefüggés többszöri használatával. Jelöljük a kocka csúcsait az $1, 2, \ldots, 8$ számokkal, ahol 1 élszomszédai $2, 3, 4$, és a k-ból kiinduló testátló másik végpontja $9 - k$. Az 1 csúcs orbitja 8-elemű (lapközéppontokat összekötő tengely körüli forgatásokkal is át lehet vinni az 1-et bármely másik csúcsba), így $|G| = 8|G_1|$. Az 1-et helybenhagyó egybevágóságok az 1 szomszédait csak az 1 szomszédaiba vihetik, és azokat egymásba is lehet vinni az 1–8 testátló körüli 120°-os forgatásokkal, ezért a 2-nek a G_1 szerinti orbitja 3-elemű, tehát $|G| = 8|G_1| = 24|G_{1,2}|$. A $G_{1,2}$ elemei a 3-at csak 3-ba vagy 4-be vihetik, és az 1–2 élen és a kocka középpontján átfektetett síkra való tükrözés a 3-at valóban átviszi 4-be, miközben helyben hagyja az 1-et és a 2-t. Végül $G_{1,2,3}$ helyben hagyja 4-et, és így az egész kockát is, tehát $|G| = 24 \cdot 2|G_{1,2,3}| = 48$.

b1) Az élek, a lapátlók, és a testátlók (mint a végpontjaik halmazai) három különböző orbitba esnek, már a hosszuk alapján is, viszont könnyen látható, hogy az azonos fajták átvihetők egymásba, mozgatással is. Tehát erre a hatásra nézve G-nek három orbitja van (12, 12 és 4 elemszámmal).

b2) Itt is három orbit van: egy lap három csúcsa, a kocka középpontos tükrözésére nézve szemközti élpár három pontja, és három olyan pont, amelyek közül semelyik nem élszomszédos. Az orbitok mérete $6 \cdot 4 = 24$, $6 \cdot 4 = 24$, illetve 8 (minden csúcs körül egy). Összesen $24 + 24 + 8 = 56 = \binom{8}{3}$ valóban kiadja a teljes alaphalmazt.

c) A csúcsok 8-elemű, az élközéppontok 12-elemű orbitot alkotnak, az élek többi pontjai 24-elemű orbitokban vannak, a lapközéppontok egy 6-elemű orbitot alkotnak, a lapátlók és a lapok középvonalainak eddig nem vizsgált pontjai 24-elemű orbitokban vannak, a lapok többi pontja pedig 48-eleműekben.

2. *Bizonyítsuk be, hogy egy legalább két elemen ható tranzitív csoporthatásban van fixpontmentes elem.*

Megoldás: A Burnside-lemma szerint a fixpontok átlaga itt 1, viszont az egységelemnek minden pont fixpontja, tehát $|\operatorname{Fix}(1)| > 1$, így kell lenni olyan $g \in G$-nek, amelynek a fixpontszáma 1-nél kisebb, azaz amely fixpontmentes.

3. *Hányféleképpen tudjuk feketére színezni egy 3×3-as négyzetháló (táblázat) három kis négyzetét, ha azonosaknak tekintjük azokat a színezéseket, amelyeket forgatással vagy tükrözéssel megkaphatunk egymásból? És ha csak a forgatással egymásba vihető színezéseket tekintjük azonosnak?*

Megoldás: Azt kell megszámolnunk, hogy az összes (azaz $\binom{9}{3} = 84$) színezésen a négyzet D_4 szimmetriacsoportjának, illetve a forgatások által alkotott $\langle f \rangle \cong C_4$ csoportnak hány orbitja van. Ehhez a Burnside-lemma szerint elég a csoportelemek fixpontszámát meghatározni.

$|\operatorname{Fix}(1)| = 84$, $|\operatorname{Fix}(f)| = |\operatorname{Fix}(f^{-1})| = 0$ (ugyanis ha kiszínezünk egy nem középső négyzetet, akkor legalább 4 színezett négyzetnek kell lennie) $|\operatorname{Fix}(f^2)| = 4$ (mert a 4 középpontosan tükrös négyzetpárból egyet kell kiválsztani a középső mellé), az átlóra való tükrözések fixpontszáma $1 + 3 \cdot 3 = 10$ (vagy a három átlón levő négyzetet választjuk, vagy egyet az átlóról, és az egyik oldalon levő három kis négyzet közül is egyet választunk ki, meg a másik oldali tükörképét), és a középvonalra való tükrözésekre is ugyanígy 10-et kapunk, mert ott is 3 kis négyzet van a tengelyen, és 3-3 a két oldalán. Tehát a fixpontok átlaga a teljes diédercsoportnál $\frac{1}{8}(84 + 2 \cdot 0 + 4 + 4 \cdot 10) = 16$, a forgatások csoportjánál pedig $\frac{1}{4}(84 + 2 \cdot 0 + 4) = 22$. Tehát a lényegesen különböző színezések száma a két esetben 16, illetve 22.

4. *A Burnside-lemma segítségével számoljuk meg, hány 4 csúcsú (egyszerű) irányított gráf létezik izomorfia erejéig.*

Megoldás: Ha az izomorf gráfokat is külön számoljuk, akkor $3^{\binom{4}{2}} = 3^6 = 729$ irányított gráf létezik: bármely kételemű $\{ a, b \}$ csúcshalmazon eldönthetjük, hogy $a \to b$, $b \to a$ van, vagy $a \nleftrightarrow b$, azaz a és b nincsenek összekötve. Izomorfia a csúcsoknak olyan permutációja, amely élt élbe, nemélt nemélbe visz. Tehát ha az S_4 természetes hatását tekintjük a fenti 729 elemű halmazon, akkor azt kell megszámolni, hogy S_4-nek hány orbitja van, amihez az egyes elemek fixpontjait (fixen hagyott irányított gráfjait) kell megszámolni. Az azonos ciklusfelbontású elemeknek nyilván ugyanannyi fixpontja van, tehát konjugáltosztályonként elég egy elemet nézni.

1: 729,
(12): $3^3 = 27$ ($1 \nleftrightarrow 2$, 3 és 4 külön-külön ugyanúgy vannak 1-hez és 2-höz kötve, és 3 ? 4 tetszőleges),
(123): : $3^2 = 9$ (az $1, 2, 3$-on ciklikus vagy üres háromszög van, 4 ugyanúgy van bekötve 1-hez, 2-höz és 3-hoz),
(1234): 3 (ciklikus vagy él nélküli négyszög, az átlók is üresek),
(12)(34): $3^2 = 9$ ($1 \nleftrightarrow 2$, $3 \nleftrightarrow 4$, és $(1, 3)$ ugyanolyan, mint $(2, 4)$, továbbá $(1, 4)$ ugyanolyan, mint $(2, 3)$.

A fixpontok átlaga $\frac{1}{24}(729 + 6 \cdot 27 + 8 \cdot 9 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot 9) = \frac{1008}{24} = 42$, tehát izomorfia erejéig 42 irányított gráf van 4 csúcson.

5. *Keressünk minimális fokú tranzitív, ill. nem feltétlenül tranzitív hűséges permutáció-reprezentációt a következő csoportokhoz!*

a) C_{10} *b)* D_6 *c)* $\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle \cong C_5 \rtimes C_4$, *ahol* $a^b = a^2$

Megoldás: a) A legkisebb olyan n-et kell megkeresnünk, amelyre S_n-ben van 10-edrendű elem. Ennek a ciklusfelbontásában vagy van 10-edrendű, vagy van egy másod- és egy ötödrendű ciklus, így $n \geq 7$, és S_7-ben $\langle (12345)(67) \rangle \cong C_{10}$. Ez a hatás nem tranzitív: egy tranzitív ciklikus csoport generátora csak egyetlen ciklusból állhat, tehát ha ez a csoport 10-edrendű, akkor a generátor egy 10-ciklus. Így nem tranzitívra 7, tranzitívra 10 a csoporthatás minimális foka.

b) S_4-ben nincs hatodrendű elem (ahhoz $n \geq 3 + 2 = 5$ kellene), így $n \geq 5$. S_5-ben van hatodrendű elem, pl. $a = (123)(45)$, és ehhez a $b = (13)$ olyan másodrendű (diszjunkt részcsoportot generáló) elem, amivel való konjugálás invertálja a-t, tehát D_6-tal izomorf csoportot generálnak. Ez a hatás azonban nem tranzitív, $\{ 1, 2, 3 \}$ és $\{ 4, 5 \}$ az orbitjai. Nem is létezhet S_5-be menő tranzitív csoporthatása, mert S_n minden tranzitív részcsoportjának a rendje osztható n-nel. D_6 természetes módon megjelenik az S_6-ban (a szabályos hatszög csúcsain való hatással), és ez tranzitív hatás. Tehát nem tranzitívra $n = 5$, tranzitívra $n = 6$ a minimum.

c) Mivel S_n-ben kell egy ötödrendű elemnek lennie, $n \geq 5$. Másrészt $H = \langle b \rangle$ nem tartalmaz normálosztót ($a^{-1} b^2 a = b^2 b^{-2} a^{-1} b^2 a = b^2 (b^{-2} a b^2)^{-1} a = b^2 (a^4)^{-1} a = b^2 a^2 \notin$

$\langle b \rangle$), ezért a H mellékosztályain való hatás hűséges, tranzitív csoporthatás. Így $n = 5$ a válasz mindkét részfeladatra. (Konkrétabban, $a \mapsto (12345)$ és $b \mapsto (2354)$ hűséges, tranzitív csoporthatás.)

Egy G csoport X és Y halmazon való csoporthatását ekvivalensnek mondjuk, ha van olyan $\alpha : X \to Y$ bijekció, hogy $(xg)\alpha = (x\alpha)g$ minden $x \in X$-re és $g \in G$-re.
Általánosabban: G-nek az X-en való csoporthatása ekvivalens H-nak az Y-on való csoporthatásával, ha van olyan $\varphi : G \to H$ izomorfizmus és $\alpha : X \to Y$ bijekció, amelyre $(xg)\alpha = (x\alpha)(g\varphi)\ \forall x \in X,\ g \in G$.

6. *Bizonyítsuk be, hogy egy G csoportnak egy Ω-n definiált tranzitív csoporthatása ekvivalens tetszőleges $\alpha \in \Omega$ elemre a G_α stabilizátor mellékosztályain való jobbszorzás hatásával.*

Megoldás: Tudjuk, hogy G_α mellékosztályai azokból az elemekből állnak, amelyek α-t ugyanoda viszik. Ez természetes bijekciót ad Ω és a G_α mellékosztályainak halmaza között: legyen $H := G_\alpha$, és $\Gamma := \{ Hg_\omega \,|\, \omega \in \Omega \}$, ahol $\alpha g_\omega = \omega$, és $\psi : \Omega \to \Gamma$, $\omega \mapsto Hg_\omega$ ez a bijekció. Ekkor tetszőleges $g \in G$-re $\alpha(g_\omega g) = \omega g$, tehát $g_\omega g \in Hg_{\omega g}$, és így $(\omega\psi)g = Hg_\omega g = Hg_{\omega g} = (\omega g)\psi$, vagyis az Ω-n és a Γ-n való csoporthatás ekvivalens.

7. *Legyen $G \le S_\Omega$, és tegyük fel, hogy $N \lhd G$ tranzitív normálosztó, amelyre $N \cap G_\alpha = 1$ valamely $\alpha \in \Omega$-ra. Lássuk be, hogy*
a) $N \cap G_\beta = 1$ minden $\beta \in \Omega$-ra;
b) N reguláris, azaz minden $\beta, \gamma \in \Omega$-ra egyetlen $g \in N$ elem létezik, hogy $\beta g = \gamma$;
c) G_α hatása az N-en a konjugálással ekvivalens a G_α hatásával az Ω-n.

Megoldás: a) Ez akkor is igaz, ha csak G tranzitív, és N nem.
Tegyük fel, hogy $x \in N \cap G_\beta$, és legyen $g \in G$ olyan, amelyre $\beta g = \alpha$. Ekkor $\alpha(g^{-1}xg) = \beta xg = \beta g = \alpha$, így $x^g \in G_\alpha$, és $N \lhd G$ miatt $\in N$, tehát $x^g \in N \cap G_\alpha = 1$, és ebből $x = 1$.
b) Tranzitív, tehát van ilyen g. Ha $g, h \in N$-re $\beta g = \beta h = \gamma$, akkor $\beta g h^{-1} = \beta$, tehát $gh^{-1} \in N \cap G_\beta = 1$, így $g = h$.
c) Legyen $\omega \in \Omega$-ra $g_\omega \in N$ az a b) rész szerint egyetlen elem, amelyre $\alpha g_\omega = \omega$. Ekkor $\omega \mapsto g_\omega$ bijekció Ω-ból N-be, és tetszőleges $h \in G_\alpha$-ra és $\omega \in \Omega$-ra $\alpha(g_\omega^h) = \alpha h^{-1} g_\omega h = \alpha g_\omega h = \omega h$, tehát $g_\omega^h = g_{\omega h}$. Így a két csoporthatás ekvivalens.

8. *Legyen A a G véges csoport automorfizmuscsoportja, és tekintsük A-t permutációcsoportnak az $\Omega = G \setminus \{ 1 \}$ halmazon. Mutassuk meg, hogy*
a) A tranzitív $\Leftrightarrow G \cong C_p \times \cdots \times C_p$ valamely p prímre;
b) A 2-tranzitív $\Leftrightarrow G \cong C_3$ vagy $G \cong C_2 \times \cdots \times C_2$;
c) A 3-tranzitív $\Leftrightarrow G \cong C_2 \times C_2$;
d) A nem lehet 4-tranzitív.

Megoldás: a) Tegyük fel, hogy A tranzitív Ω-n. Mivel egy automorfizmus megőrzi az elemrendet, és a Cauchy-tétel szerint van G-ben prímrendű elem (legyen ez a prím p), A tranzitivitása miatt minden 1-től különböző elem rendje p. Ebből következik, hogy G p-csoport, és így $1 \neq Z(G)\,\mathrm{char}\,G$. De A elemei minden karakterisztikus részcsoportot helyben hagynak, ezért $G = Z(G)$ Abel-csoport, 1-en kívül csupa p rendű elemmel, tehát $G = C_p \times \cdots \times C_p$.
Most tegyük fel, hogy $G = C_p \times C_p$, n komponenssel. Ekkor G izomorf egy n-dimenziós vektortérrel $\mathbb{Z}_p$ fölött: ha a generátorelemek $a_1, \ldots, a_n$, akkor $\mathbb{Z}_p^n \to G$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (a_1^{x_1}, \ldots, a_n^{x_n})$ bijekció, és az összeadásnak szorzást, a skalárral való szorzásnak hatványozást feleltetve meg, izomorfizmus is. G automorfizmusai pedig

a vektortér invertálható lineáris transzformációi, azaz azok, amelyek valamely bázist egy másik bázisba visznek.
Tetszőleges $b, c \neq 1$ elem kiegészíthető $b, b_2, \dots, b_n$, illetve $c, c_2, \dots, c_n$ bázissá, és ezek egymásba vihetők, így b elvihető c-be.

b) Ha A 2-tranzitív, akkor $p \leq 3$, mert különben $1 \neq a \in G$-re $a, a^2, a^3 \in G \setminus \{1\}$ különbözők, és az a, a^2 párt nem lehet automorfizmussal a, a^3-be vinni.
Továbbá, ha $p = 3$, akkor $n = 1$, mert különben van b, c független, és $b^2 \neq 1$, de a b, b^2 pár nem vihető b, c-be.
Tehát $G \cong C_3$ vagy $G \cong C_2 \times \cdots \times C_2$.
Fordítva, C_3-ra nyilván 2-tranzitív az A, a második esetben pedig tetszőleges $b_1, b_2 \in \Omega$ különböző elemek függetlenek lesznek, ugyanígy a c_1, c_2 különböző elemek, tehát kiegészíthetők bázissá: $b_1, b_2, \dots, b_n$ és $c_1, c_2, \dots, c_n$, és így egymásba vihetők.

c) Ha A 3-tranzitív, akkor a $G \cong C_3$ eset már nem jöhet szóba a b) megoldásai közül, tehát G n darab C_2 direkt szorzata. De $n > 2$ nem lehet, mert akkor vannak a, b, c független elemek, és az a, b, ab elemhármas nem vihető automorfizmussal a, b, c-be. Így csak $G \cong C_2 \times C_2$ lehet.
Ez utóbbi esetben pedig valóban 3-tranzitív az A, mert tetszőleges x, y különböző, nem egységelemre az Ω harmadik eleme xy, és az x, y, xy alakú elemhármasok nyilván egymásba vihetők, mert x, y független.

d) A c) rész egyetlen megoldása nem lehet 4-tranzitív, mert ott $|\Omega| = 3$.

Hf1. *Hányféleképpen lehet egy 4×4-es kis négyzetből álló négyzetben négy mezőt beszínezni, ha az elforgatással vagy tükrözéssel egymásba vihető színezéseket azonosnak tekintjük?*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy a $K \cup \{\infty\}$ halmazon ható*

$$\left\{ x \to \frac{ax+b}{cx+d} \;\middle|\; a, b, c, d, \in K,\ ad - bc \neq 0 \right\}$$

csoport minden K test esetén 3-tranzitív.
(Úgy tekintjük, hogy $(a\infty + b)/(c\infty + d) = a/c$, ha $c \neq 0$, és ∞, ha $c = 0$ (és így $a \neq 0$), továbbá $y/0 = \infty$, ha $y \neq 0$.)