1. *Bizonyítsuk be, hogy $g^{-1}G_\alpha g = G_{\alpha g}$.*

Megoldás: $\leq$: Ha $h \in G_\alpha$, akkor $(\alpha g)(g^{-1}hg) = \alpha hg = \alpha g$, tehát $g^{-1}hg \in G_{\alpha g}$.
$\geq$: Az előbbi miatt $gG_{\alpha g}g^{-1} \leq G_{\alpha g g^{-1}} = G_\alpha$, így $G_{\alpha g} \leq g^{-1}G_\alpha g$.

2. *Bizonyítsuk be, hogy egy tranzitív G permutációcsoport akkor és csak akkor primitív, ha az alaphalmaz valamely/bármely elemének stabilizátora maximális részcsoport G-ben.*

Megoldás: Az állítás csoporthatásra ugyanúgy igaz, és ugyanaz a bizonyítása, mint permutációcsoportra.
Azt látjuk be, hogy G akkor és csak akkor imprimitív, ha G_α nem maximális G-ben. (Az 1. feladat miatt mindegy, hogy valamely vagy bármely α-ra mondjuk.)

Tegyük fel, hogy G imprimitív, és $\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k$ nem triviális G-invariáns partíció: $|\Omega_1| > 1$, és $k > 1$. Legyen α, β az Ω_1 két különböző eleme, és $\gamma \in \Omega_2$, továbbá $M = \{\, g \in G \mid \Omega_1 g \subseteq \Omega_1 \,\}$.
Minden $h \in G_\alpha$-ra $\alpha \in \Omega_1 h \cap \Omega_1 \Rightarrow \Omega_1 h \subseteq \Omega_1 \Rightarrow G_\alpha \leq M$.
G tranzitivitása miatt van olyan $g \in G$, hogy $\alpha g = \beta$. Ekkor $\beta \in \Omega_1 g \cap \Omega_1 \Rightarrow \Omega_1 g \subseteq \Omega_1$ $\Rightarrow g \in M \setminus M_\alpha$, így G_α valódi részcsoportja M-nek.
Olyan $g \in G$ is van, amelyre $\alpha g = \gamma$, tehát $\beta \in \Omega_1 g \cap \Omega_2 \Rightarrow \Omega_1 g \subseteq \Omega_2 \Rightarrow g \in G \setminus M$, és emiatt M valódi részcsoportja G-nek.
$G_\alpha < M < G$, tehát G_α nem maximális részcsoport G-ben.

Most tegyük fel, hogy G_α nem maximális: $G_\alpha < M < G$ valamely M-re, és tekintsük az $\alpha M g$ $(g \in G)$ részhalmazokat Ω-ban.
Ezek Ω-nak egy G-invariáns partícióját adják: G-invariáns, mert $(\alpha M g)h = \alpha M(gh)$, és partíció, mert ha $\alpha M g \cap \alpha M h \neq \emptyset$, akkor van olyan $m, m' \in M$, hogy $\alpha m g = \alpha m' h$, így $\alpha m' h g^{-1} m^{-1} = \alpha \Rightarrow m' h g^{-1} m^{-1} \in G_\alpha \leq M \Rightarrow hg^{-1} \in (m')^{-1} M m = M \Rightarrow Mh = Mg$ $\Rightarrow \alpha M g = \alpha M h$.
A partíció nem triviális, mert egy $m \in M \setminus G_\alpha$ elemre $\alpha m \neq \alpha \Rightarrow |\alpha M 1| = |\alpha M| > 1$, és mert $\alpha M \neq \Omega$, ugyanis ha egyenlők lennének, azaz M tranzitív lenne, akkor M a G_α minden mellékosztályából tartalmazna elemet, tehát $G = G_\alpha M = M$ lenne.
Tehát azt kaptuk, hogy G imprimitív.

3. *Milyen $H < G$ részcsoportra igaz, hogy a H mellékosztályain való hatás a jobbszorzással*
a) hűséges;
b) tranzitív;
c) reguláris;
d) primitív;
e) 2-tranzitív?

Megoldás: a) A hatás magja a G-nek a H-ban levő legnagyobb normálosztója, így a csoporthatás akkor hűséges, ha nincs G-nek olyan 1-től különböző normálosztója, amely benne van a H-ban.
b) A mellékosztályokon való hatás minden H-ra tranzitív: $(Hx)(x^{-1}y) = Hy$ tetszőleges x, y-ra.
c) Egy permutációcsoport vagy csoporthatás akkor reguláris, ha tranzitív, és minden (illetve az 1. feladat miatt valamely) elem stabilizátora 1, azaz ha minden $\neq 1$ eleme fixpontmentes, ugyanis g, h akkor viheti α-t ugyanoda, ha gh^{-1}-nek fixpontja az α. H-nak mint mellékosztálynak a stabilizátora önmaga, tehát a hatás csak akkor lehet reguláris, ha $H = 1$, azaz a csoporthatás a Cayley-reprezentáció.

d) Mivel H az H-nak mint mellékosztálynak a stabilizátora (és a hatás mindenképpen tranzitív), a 2. feladat szerint ez a csoporthatás pontosan akkor primitív, ha H a G-nek maximális részcsoportja.

e) A hatás mindenképpen tranzitív, tehát 2-tranzitív akkor lesz, ha az egyik elem, mondjuk, a H stabilizátora tranzitív a többi elemen. Ez azt jelenti, hogy egy $x \in G \setminus H$-ra HxH lefedi az egész $G \setminus H$-t, vagy ekvivalensen: $G = H \cup HxH$ valamely $x \in G$-re.

4. *Adjuk meg a D_4 és S_4 csoportok összes hűséges, tranzitív csoporthatását ekvivalencia erejéig! Melyik primitív ezek közül?*

Megoldás: Láttuk a 4/6. feladatban, hogy a tranzitív csoporthatások mind ekvivalensek valamely részcsoport mellékosztályain való hatással, és az előző feladat szerint akkor kapunk hűséges hatást, ha H nem tartalmaz G-beli nem triviális normálosztót.

D_4 minden 4-elemű részcsoportja, és maga a D_4 nyilván normálosztó, tehát a Cayley-reprezentáción kívül csak a kételemű részcsoportok mellékosztályain való hatás jöhet szóba. Ezek közül $\langle f^2 \rangle$ normáosztó, tehát marad a négy tengelyes tükrözés. Mindegy, hogy melyik: D_4 automorfizmusai ezeket egymásba vihetik: mindegyikkel ugyanazt az $\langle f \rangle \rtimes \langle \tau \rangle \cong C_4 \rtimes C_2$ szemidirekt szorzatot kapjuk. Tehát csak két ilyen csoporthatás van ekvivalencia erejéig, az egyik S_8-ba képez, a másik S_4-be. Konkrétabban, az $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \leftrightarrow (1, f, f^2, f^{-1}, t, tf, tf^2, tf^{-1})$ megfeleltetést használva az elsőnél f képe $(1234)(5678)$, t hatása pedig $(15)(28)(37)(46)$, a másodiknál $H = \langle t \rangle$ mellékosztályaira az $(1, 2, 3, 4) \leftrightarrow (H1, Hf, Hf^2, Hf^{-1})$ megfeleltetéssel f képe (1234), t képe pedig (24). (De tudjuk is, hogy S_4-ben csak a 2-Sylowok a 8-adrendű részcsoportok, amelyek konjugáltak egymással, tehát ekvivalens csoporthatásokat jelentenek, és mindegyik a diédercsoport természetes hatásával hat a 4 elemen.)
Viszont egyik hatás sem primitív: az 1 nyilván nem maximális részcsoport, és a $\langle t \rangle$ sem, mivel ezt tartalmazza a $\langle t \rangle \times \langle f^2 \rangle$ részcsoport.

S_4 normálosztói csak $1, V, A_4$ és S_4. Részcsoportjainak a rendje csak a 24 osztója lehet: $24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1$. De 4-nél kisebb indexű csoport mellékosztályain való csoporthatás S_4-nél kisebb szimmetrikus csoportba képez, így az nem lehet hűséges, tehát csak $6, 4, 3, 2, 1$ jöhet szóba. Ezek közül legfeljebb a 4 elemű tartalmazhat nemtriviális normálosztót, a többi hatás biztosan hűséges.
$|H| = 6$ esetén H tartalmaz egy 3-ciklust (feltehető, hogy (123)-at), és ez H-nak normálosztója, tehát még egy olyan 2-odrendű elemet tartalmaz, ami ezt normalizálja, azaz csak (12), (13) vagy (23) lehet. Akármelyikkel ugyanazt az S_3-at generálja, azaz a 4 stabilizátorát. Így az S_4 természetes hatásával ekvivalens csoporthatást kapunk, ami 4-tranzitív, tehát primitív is.
$|H| = 4$ esetén H vagy ciklikus, mondjuk, $H = \langle (1234) \rangle$, vagy olyan elemi Abel 2-csoport, amelyben van A_4-en kívüli elem, azaz 2-ciklus: $H = \langle (12), (34) \rangle$. (Ha H-nak valamelyik konjugáltját vesszük, az ekvivalens csoporthatást ad, tehát elég ezt a kettőt nézni.) Egyik hatás sem primitív, mert H-t valódi módon tartalmazza S_4 2-Sylowja. Az még a kérdés, hogy ekvivalens-e ez a két, S_6-ba menő csoporthatás. Vegyük észre, hogy a H mellékosztályain való csoporthatásnál

Hx fixpontja g-nek $\Leftrightarrow Hxg = Hx \Leftrightarrow xgx^{-1} \in H$, így

g-nek van fixpontja a csoporthatásnál $\Leftrightarrow$ g-nek van konjugáltja H-ban.

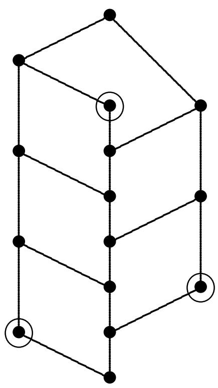
Ebből következik, hogy az első csoporthatásnál az S_4 4-ciklusainak (azaz a negyedrendű elemeinek) van fixpontja a hatodfokú reprezentációnál, a másodiknál viszont nincs. Így a két csoporthatás nem ekvivalens.

$|H| = 3$ esetén H-t egy 3-ciklus generálja, így ezek a 8-adfokú csoporthatások mind ekvivalensek. Továbbá nem primitívek, mert H-t tartalmazza valamelyik stabilizátor.
$|H| = 2$ esetén két lényegesen különböző eset van: $H = \langle(12)\rangle$ vagy $H = \langle(12)(34)\rangle$. A 4-elemű részcsoporthoz hasonlóan ezeket is megkülönböztethetjük a fixpontszámok alapján: a V karakterisztikus részcsoport 1-től különböző elemeinek nincs fixpontja az első csoporthatásnál, de van a másodiknál. A csoporthatás nem primitív: H-t tartalmazza egy 2-Sylow.
$H = 1$ a Cayley-reprezentációt adja, ami nyilván nem lesz primitív, mert 1 nem maximális részcsoport S_4-ben.

5. *Bizonyítsuk be, hogy minden végesen generált szabad disztributív háló véges.*

Megoldás: Véges sok elem a szabad disztributív hálóban is csak véges sok elemet tud generálni: ha $x_1, \dots, x_n$ a generátorelemek, és $p_1, \dots, p_m$ az ezekből alkotható $m = 2^n - 1$ metszet, akkor a disztributivitás miatt minden elem felírható valahány p_i egyesítéseként. Ez legfeljebb $2^m - 1$ elemet ad. (Sőt, biztosan lényegesen kevesebbet, mert egy részhalmaz metszete elnyeli egy őt tartalmazó halmaz metszetét ebben az egyesítésben, tehát elég olyan p_i-k egyesítését venni, amelyekhez tartozó halmazok közül semelyik nem tartalmazza a másikat.)

6. *Bizonyítsuk be, hogy az alábbi típusú (tetszőleges magasságú) hálókat generálja a kijelölt három elem, tehát a három elemmel generált szabad háló végtelen.*



Megoldás: Legyenek a bal oldalon levő lánc elemei lentről felfelé $a = a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, a középen levők $b_1, b_2, \dots, b_{2n+1} = b$ és a jobb oldalon levők $c = c_1, \dots, c_n$. Ekkor $b_1 = a \wedge c$, $b_2 = b \wedge c$, és rekurzívan $a_{i+1} = a_i \vee b_{2i}$, $b_{2i+1} = a_{i+1} \wedge b$, $c_{i+1} = b_{2i+1} \vee c_i$, és $b_{2i+2} = b \wedge c_{i+1}$. A végén a maximális elem $a_{n+1} \vee c_n$.

7. *Oldjuk meg a következő diofantoszi egyenletrendszert a mátrixának Smith-normálalakra hozásával!*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3x & - & y & & & = & 1 \end{array}$$

Megoldás: A szokásos Gauss-eliminációt módosítjuk úgy, hogy a sorműveletek közül csak a sorcserét, -1-gyel szorzást és $s_i \mapsto s_i - cs_j$ $(c \in \mathbb{Z})$ alakúakat engedjük meg, hogy a diofantoszi egyenletrendszer továbbra is diofantoszi maradjon, és hasonló oszlopműveleteket is végzünk, ami új változók bevezetését jelenti, de úgy, hogy a régiek pontosan akkor legyenek egészek, amikor az újak egész értéket vesznek fel. Az ismeretlenek változását követni lehet, ha felírjuk, hogy az x, y, z hogy állítható elő belőlük, azaz egy egységmátrixszal kezdjük, és ha oszlopműveletet végzünk, azt ezen is végrehajtjuk. A Smith-normálalakra hozott mátrixból leolvashatjuk a megoldást (ha a konstans nem osztható a diagonális elem együtthatójával, akkor nincs megoldás), majd ennek az oszlopműveleteket követő mátrixszorosa megadja az x, y, z értékét.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s}{\mapsto} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right] \overset{s}{\mapsto} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \overset{s}{\mapsto}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 8 & 9 & 10 \end{array}\right] \overset{o}{\mapsto} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 8 & 9 & 10 \end{array}\right] \overset{o}{\mapsto} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & 8 & 10 \end{array}\right] \overset{o}{\mapsto}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & 10 \end{array}\right] \overset{o}{\mapsto} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

A megoldás az új változókkal $(-3, 10, t)$ $(t \in \mathbb{Z})$, a régiekkel pedig

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+3t \\ -10+9t \\ 10-8t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{Z})$$

8. *Adjuk meg a következő Abel-csoportok generátorokkal megadott részcsoportjának és a részcsoporttal vett faktorcsoportnak a kanonikus alakját!*

a) $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus \langle c \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, *és* $H = \langle 2a - 2b + 3c,\ 4b - 3c \rangle$

b) $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus \langle c \rangle \cong \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, *és* $H = \langle 4a - c,\ b + c \rangle$.

Megoldás: a) Ha felírjuk a H generátorelemei előállításának az együtthatóit egy mátrix soraiba, és az előző feladat szerinti műveleteket végezve diagonális alakra hozzuk a mátrixot, akkor a sorműveletek a generátorrendszert, az oszlopműveletek a szabad Abel-csoport bázisát cserélik ki úgy, hogy az új felírásban a H és G/H is könnyen leolvasható legyen.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát az új $\{\, u, v, w \,\}$ bázisban $H = \langle u, 2v \rangle = \langle u \rangle \oplus \langle 2v \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, és $G/H = (\langle u \rangle \oplus \langle v \rangle \oplus \langle w \rangle)/(\langle u \rangle \oplus \langle 2v \rangle \oplus 0) \cong (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/0) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$.

b) Legyen $A = \langle x \rangle \oplus \langle y \rangle \oplus \langle z \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ szabad Abel-csoport, és tekintsük a $\varphi : A \to G$ szürjektív homomorfizmust, amelyre $x \mapsto a$, $y \mapsto b$ és $z \mapsto c$. Ekkor $\operatorname{Ker} \varphi = \langle 16x, 2y, 4z \rangle$, és H ősképe $\tilde{H} = \langle 4x - z, y + z, 16x, 2y, 4z \rangle$. Az a) rész módszerével meghatározhatjuk az $A/\tilde{H} \cong (A/\operatorname{Ker} \varphi)/(\tilde{H}/\operatorname{Ker} \varphi) \cong G/H$ faktorcsoportot.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 16 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&4\\0&0&16\\0&0&-8\\0&0&16\end{bmatrix}\overset{o}{\mapsto}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&16\\0&0&-8\\0&0&-16\end{bmatrix}\overset{s}{\mapsto}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&8\\0&0&16\\0&0&16\end{bmatrix}\overset{s}{\mapsto}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Tehát $G/H \cong (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_8$.
Ahhoz, hogy H kanonikus alakját is megadjuk, a $\tilde{H}/\operatorname{Ker}\varphi$ faktorcsoportot kell leírnunk az előző módszerrel, ahol $\tilde{H}$ maga is szabad csoport, mert A-nak része. De ehhez le kell olvasnunk $\operatorname{Ker}\varphi$ generátorait a H szabad generátorrendszerében, amihez először az A új $\{u, v, w\}$ bázisában írjuk fel úgy, hogy az előbb elvégzett oszlopműveleteket végrehajtjuk a $\operatorname{Ker}\varphi$-hez tartozó mátrixon.

$$\begin{bmatrix}16&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}\overset{o}{\mapsto}\begin{bmatrix}0&0&16\\0&2&0\\-4&0&0\end{bmatrix}\overset{o}{\mapsto}\begin{bmatrix}0&0&16\\0&2&0\\-4&0&16\end{bmatrix}\overset{o}{\mapsto}\begin{bmatrix}0&0&16\\0&2&-8\\-4&0&16\end{bmatrix}$$

Az $\{u, v, w\}$ bázis helyett a $\tilde{H}$ $\{u, v, 8w\}$ bázisában a $\operatorname{Ker}\varphi$ mátrixa:

$$\begin{bmatrix}0&0&2\\0&2&-1\\-4&0&2\end{bmatrix}\overset{o}{\mapsto}\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&2&0\\2&0&-4\end{bmatrix}\overset{s}{\mapsto}\begin{bmatrix}1&-2&0\\2&0&0\\2&0&-4\end{bmatrix}\overset{s}{\mapsto}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&4&0\\0&4&-4\end{bmatrix}\overset{o}{\mapsto}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&4&-4\end{bmatrix}\overset{s}{\mapsto}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-4\end{bmatrix}\overset{s}{\mapsto}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

Ebből leolvasható, hogy $G/H \cong \tilde{H}/\operatorname{Ker}\varphi \cong (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$.
(Ilyen apró csoportoknál persze az algoritmikus megoldás helyett ad hoc módszerekkel is elboldogulunk. Észrevehetjük, hogy a H generátorelemei, $4a - c$ és $b + c$ negyedrendűek, és a generátumuk nem metszi egymást ($0 \neq 8a - 2c \neq 2b + 2c = 2c \neq 0$), tehát $H \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$. Így $|G/H| = 16 \cdot 2 \cdot 4/16 = 8$. Megnézzük, hogy ciklikus-e. Az a képe az egyetlen jelölt, ami lehet esetleg 8-adrendű. Azt kell belátni, hogy $4a \notin H$. Valóban, ha $4a = x(4a - c) + y(b + c) = 4xa + yb + (y - x)c$ valamely $0 \leq x, y \leq 3$-ra, akkor $x = 1 \Rightarrow y = 1$, de akkor b is szerepel a kifejezésben. Tehát a képe csak 8-adrendű lehet, és így $G/H \cong \mathbb{Z}_8$.)

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy 12-elemű tranzitív permutációcsoport primitív, akkor szükségképpen 2-tranzitív is.*

Hf2. *Adjuk meg a $G = \langle a\rangle \oplus \langle b\rangle \cong \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_4$ Abel-csoport $H = \langle 4a + b,\ 2a + 2b\rangle$ részcsoportjának és $N = \langle 2a + 2b\rangle$ normálosztóval vett faktorcsoportjának kanonikus alakját.*