1. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehet:

$$A+A,\quad A+B,\quad AB,\quad AC,\quad AC+2C,\quad A^{-1}D,\quad D^2,\quad BC,\quad CB.$$

Számítsuk ki A, CB és $CB+A$ determinánsát is.

3. Keressünk olyan $n \times n$-es A, B, C valós mátrixokat, melyekre:

a) $AB = 0$, és $BA \neq 0$

b) $C^2 = C$, és $C \neq 0, I$.

4. Legyenek A, B tetszőleges $n \times n$-es mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy az $AB - BA$ mátrix főátlójában az elemek összege 0.

5. Az a és b értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek a valós számok körében? Adjuk is meg a megoldásokat!

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & + & 2y & - & z & = & -1 \\ x & - & y & + & 2z & = & a \\ x & + & by & + & z & = & 3 \end{array}$$

6. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, aminek

a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;

b) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;

c) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és nincs megoldása;

c) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és pontosan 5 megoldása van?

6. Bizonyítsuk be, hogy testet alkot

a) a $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ halmaz, ha a szorzást és az összeadást úgy definiáljuk, hogy az igazi szorzatnak illetve összegnek a p szerinti maradékát vesszük;

b) az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$ halmaz a komplex összeadásra és szorzásra nézve.

7. Melyek alkotnak vektorteret $\mathbb{R}$ fölött az alábbiak közül? A köztük szereplő vektorterek hány dimenziósak?

a) 3×3-as valós felső háromszögmátrixok a szokásos műveletekkel;

b) invertálható 2×2-es valós mátrixok;

c) a legföljebb 5-ödfokú valós polinomok;

d) a valós számpárok az $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$ összeadásra és $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ skalárral való szorzásra nézve;

e) $\mathbb{C}$ a komplex számok összeadására és valóssal való szorzására nézve.

8. Melyik leképezések lineárisak a következők közül? A lineárisaknak adjuk meg a mátrixát a standard bázisban.

a) az $\mathbb{R}^2$ sík tükrözése az $x = 2$ egyenesre;

b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, ahol $\varphi((x, y, z)) = (x + y, x + y)$;

c) az a leképezés, amely minden $\mathbb{R}^2$-beli vektorhoz a hosszát rendeli;

d) a 2×2-es valós mátrixokon a mellékátlóra való tükrözés;

e) a komplex konjugálás a $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortéren;

f) egy adott $a + bi$ komplex számmal való szorzás a $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortéren;

g) a sík α szögű elforgatása az origó körül.

9. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, amelyre $f(\mathbf{x}) = CB\mathbf{x}$ a 2. feladat C és B mátrixával. Határozzuk meg f képterét és magterét.

Hf1. Számítsuk ki az $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát és inverzét.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy az $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ halmaz testet alkot a valós összeadásra és szorzásra nézve.