

1. Milyen értéke lehet egy olyan 3×3 -as determinánsnak, amelynek minden eleme 0 vagy 1?
 2. Legyen A egy 5×5 -ös mátrix, amelynek determinánsa 3. Mi lesz a determinánsa a $2A^{-1}$, $(2A)^{-1}$, és $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$ mátrixoknak?
 3. Határozzuk meg annak a mátrixnak a determinánsát, amelynek a főátlójában csupa 1 van, mellékátlójának többi eleme mind 2, és a mátrix minden más eleme 0.
 4.
 - a) Mutassuk meg, hogy egy felső háromszögmátrix determinánsa a diagonális elemek szorzata.
 - b) Lássuk be, hogy felső háromszögmátrixok szorzata is felső háromszögmátrix, diagonálisaké pedig diagonális.
 - c) Mikor invertálható egy felső háromszögmátrix, illetve egy diagonális mátrix. Bizonyítsuk be, hogy az inverzük is ilyen alakú.
 5. Adjuk meg y értékét a Cramer-szabály segítségével, ha $3x - y + z = 0$, $x + 2y - z = 2$, $x - y + 2z = 5$.
 6. Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ lineárisan független vektorok egy vektortérben. Függetlenek-e a következő vektorok?
 - a) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n$
 - b) $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{n-1} - \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_1$
 - c) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_1$
 7. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok közül \mathbf{v}_1 az egyetlen, amelyik előállítható a többi vektor lineáris kombinációjaként, akkor $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.
 8. Bizonyítsuk be, hogy \mathbb{R}^n -ben n vektor akkor és csak akkor alkot bázist, ha az n vektorból mint oszlopokból alkotott mátrix determinánsa nem 0.
 9. Válasszunk ki maximális lineárisan független rendszert a $(2, 3, 0, -1)$, $(1, 2, -1, 0)$, $(2, 4, -2, 0)$, $(1, 0, 3, -2)$ vektorok közül, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként!
 10. Adjuk meg a az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban:
 - a) az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés, standard bázis;
 - b) $f : (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, x + z, y - 3z)$; standard bázis, illetve $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 1)\}$;
 - c) a sík tükrözése az $y = 2x$ egyenesre; standard bázis, illetve $\{(1, 2), (-2, 1)\}$.
 11. Mennyi az $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix rangja?
- Hf1.** Bizonyítsuk be, hogy a 3×3 -as valós felső háromszögmátrixok vektorteret alkotnak a szokásos műveletekkel! Adjuk meg ennek a vektortérnek egy bázisát!
- Hf2.** Adjuk meg az $(1, 1, 1)$ irányvektorú, origón átmenő egyenesre való tükrözés mátrixát a standard bázisban!