1. *Legyenek megadva az alábbi mátrixok:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehet:

$$A+A,\quad A+B,\quad AB,\quad AC,\quad AC+2C,\quad A^{-1}D,\quad D^2,\quad BC,\quad CB.$$

Számítsuk ki A, CB és $CB+A$ determinánsát is.

Megoldás: $A+B$, AB, D^2 nincs értelmezve. A többi mátrixművelet eredménye:

$$A+A = 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \qquad AC = \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad AC+2C = \begin{bmatrix} 13 \\ 20 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}D = \begin{bmatrix} -1 & -32 \\ 4 & 33 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} \qquad BC = \begin{bmatrix} -12 \end{bmatrix} \qquad CB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$$

A determinánsok: $|A| = -1$, $|CB| = 0$, $|CB+A| = 0$.

2. *Keressünk olyan $n \times n$-es A, B, C valós mátrixokat, melyekre:*
a) $AB = 0$, *és* $BA \neq 0$
b) $C^2 = C$, *és* $C \neq 0, I$.

Megoldás: Pl. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ megfelel $n = 2$-re. Nagyobb n-ekre tegyük az előbb megadott mátrixokat a bal fölső sarokba, és máshova mindenhova 0-t. $n = 1$-re nincsenek ilyen mátrixok.

3. *Legyenek A, B tetszőleges $n \times n$-es mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy az $AB - BA$ mátrix főátlójában az elemek összege (azaz az $AB - BA$ mátrix nyoma) 0.*

Megoldás: Legyen $C = AB$ és $D = BA$. Ekkor $c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$, és $d_{jj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}$. Tehát AB nyoma $\sum_{i,j\geq 1} c_{ii} = \sum_{i,j\geq 1} a_{ij}b_{ji}$, BA nyoma pedig $\sum_{i,j\geq 1} d_{ii} = \sum_{i,j\geq 1} b_{ji}a_{ij}$, és ezek nyilvánvalóan egyenlők, ezért $AB - BA$ nyoma 0.

4. *Az a és b értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek a valós számok körében? Adjuk is meg a megoldásokat!*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & + & 2y & - & z & = & -1 \\ x & - & y & + & 2z & = & a \\ x & + & by & + & z & = & 3 \end{array}$$

Megoldás: Hozzuk az egyenletrendszer kiegészített mátrixát lépcsős alakra!

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & a \\ 1 & b & 1 & 3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & a \\ 1 & b & 1 & 3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & a+1 \\ 0 & b-2 & 2 & 4 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & a+1 \\ 0 & b-2 & 2 & 4 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \\ 0 & 0 & b & 2b \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & b & 2b \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right]$$

Ebből látható, hogy az egyenletrendszernek nincs megoldása, ha $a \neq 5$, végtelen sok megoldása van, ha $a = 5$ és $b = 0$, végül egyértelmű megoldása van, ha $a = 5$ és $b \neq 0$. A megoldások az utóbbi két esetben (egy-két további redukciós lépés után): $x = 3 - z$, $y = -2 + z$, és z tetszőleges valós szám, illetve amikor egyértelmű a megoldás, akkor $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$.

5. *Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, aminek*

a) *5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;*
b) *6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;*
c) *5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és nincs megoldása;*
d) *5 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és pontosan 5 megoldása van?*

Megoldás: Az a) eset nem lehetséges, mert ha van megoldás, akkor a hat változó között biztosan van szabad változó. A b) eset lehetséges: az öt független egyenlet után odarakhatunk egy hatodikat, amelyik a korábbiak lineáris kombinációja. A c) is előfordulhat: a második egyenletet válasszuk úgy, hogy bal oldala megegyezik az elsővel, de a konstans tag más. Végül a d) eset valós egyenletrendszernél nem fordulhat elő, mert ott csak 0, 1 vagy végtelen sok megoldás lehet, de a $\mathbb{Z}_5$ ötelemű test fölött lehet öt megoldás: pl. $x_1 + x_5 = 1$ $x_2 + x_5 = 1$ $x_3 + x_5 = 1$, $x_4 + x_5 = 1$, $x_1 - x_2 = 0$. Itt x_5 tetszőleges (ötféle!) értéket vehet föl, és a többit ezzel kifejezhetjük.

6. *Bizonyítsuk be, hogy testet alkot*

a) *a $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ halmaz, ha a szorzást és az összeadást úgy definiáljuk, hogy az igazi szorzatnak illetve összegnek a p szerinti maradékát vesszük;*
b) *az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$ halmaz a komplex összeadásra és szorzásra nézve.*

Megoldás: a) Felhasználjuk, hogy ha a és a', illetve b és b' p-vel vett maradéka megegyezik, akkor $a + b$ és $a' + b'$, illetve ab és $a'b'$ is azonos maradékot adnak. Ebből következik, hogy tetszőleges $+$-gel és $\cdot$-tal alkotott kifejezés értékét úgy is megkaphatjuk $\mathbb{Z}_p$-ben, hogy először $\mathbb{Z}$-ben számoljuk ki, és csak a végén vesszük a maradékot. Ennek pedig egyenes következménye, hogy a műveleti azonosságok teljesülnek $\mathbb{Z}_p$-ben, mert $\mathbb{Z}$-ben is teljesülnek. A $+$-ra és $\cdot$-ra való zártság nyilvánvaló a definícióból. 0-elem és 1-elem a 0 és az 1, egy $a \neq 0$ elem negatívja pedig $p - a$ (a 0-é pedig 0). Azt kell még belátnunk, hogy minden $a \neq 0$ elemnek van reciproka. Tekintsük az $a, 2a, \ldots, (p-1)a$ egész számok p-vel vett maradékait. Ezek mind különbözők, mert ha ia és ja azonos maradékot ad, akkor $ia - ja = (i - j)a$ osztható p-vel, és így $i - j$ is osztható, ami pedig 0 és $p - 2$ között van, tehát ilyenkor $i = j$. Másrészt a 0 nincs a maradékok között, tehát az összes többi maradékot megkapjuk, köztük az 1-et. Ha ia maradéka 1, akkor i az a reciproka a $\mathbb{Z}_p$-ben.

b) Legyen $K = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Itt a műveleti azonosságokat nem kell külön belátnunk, mert azok a K halmazt tartalmazó $\mathbb{C}$ testben is teljesülnek. K zárt a műveletekre nézve: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ és $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$, ahol az együtthatók nyilván racionálisak, hiszen $\mathbb{Q}$ test. Van 0-elem: $0 + 0i$ és 1-elem: $1 + 0i$, továbbá additív inverz K-ban: $(-a) + (-b)i$. Végül multiplikatív inverz is létezik, ugyanis a $\mathbb{C}$-beli reciprok benne van a K-ban is: $1/(a + bi) = (a - bi)/(a^2 + b^2) = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$ mindkét együtthatója racionális, ha a és b azok voltak.

7. *Melyek alkotnak vektorteret $\mathbb{R}$ fölött az alábbiak közül? A köztük szereplő vektorterek hány dimenziósak?*

a) *3×3-as valós felső háromszögmátrixok a szokásos műveletekkel;*
b) *invertálható 2×2-es valós mátrixok;*
c) *a legföljebb 5-ödfokú valós polinomok;*
d) *a valós számpárok az $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$ összeadásra és $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ skalárral való szorzásra nézve;*
e) *$\mathbb{C}$ a komplex számok összeadására és valóssal való szorzására nézve.*

Megoldás: Az a), c) és e) részekben definiált struktúrák vektorterek, a b)-ben megadott nem, mert pl. invertálható mátrix skalárszorosa sem feltétlenül invertálható: a 0-szorosa nem az (de összegre sem zárt ez a halmaz). A d)-ben megadott összeadás pedig nem kommutatív (mellesleg, nem is asszociatív): $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$, és $(c, d) \oplus (a, b) = (c + b, a + d)$ különböznek. Tehát a d)-beli nem vektortér. A dimenziókat egy-egy bázis megadásával határozhatjuk meg:

a) Bázisa az $\{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{22}, E_{23}, E_{33}\}$, ahol E_{ij} azt a mátrixot jelöli, amelynek egyetlen nem nulla eleme az ij helyen levő 1. A vektortér dimenziója 6.

c) Bázisa $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$, dimenziója szintén 6.

e) Bázisa $\{1, i\}$, dimenziója 2. Mindhárom esetben könnyű látni, hogy a vektortér elemei egyértelműen írhatók föl a báziselemek lineáris kombinációjaként.

8. *Melyik leképezések lineárisak a következők közül? A lineárisaknak adjuk meg a mátrixát a standard bázisban.*

a) *az $\mathbb{R}^2$ sík tükrözése az $x = 2$ egyenesre;*
b) *$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, ahol $\varphi((x, y, z)) = (x + y, x + y)$;*

c) az a leképezés, amely minden $\mathbb{R}^2$-beli vektorhoz a hosszát rendeli;
d) a 2×2-es valós mátrixokon a mellékátlóra való tükrözés;
e) a komplex konjugálás a $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortéren;
f) egy adott $a+bi$ komplex számmal való szorzás a $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortéren;
g) a sík α szögű elforgatása az origó körül.

Megoldás: a) Nem lineáris, mert az origót nem hagyja helyben.

b) Lineáris: $\varphi((x,y,z)+(x',y',z')) = \varphi(x+x',y+y',z+z') = (x+x'+y+y',x+x'+y+y') = (x+y,x+y)+(x'+y',x'+y') = \varphi(x,y,z)+\varphi(x',y',z')$, és $\varphi(\lambda(x,y,z)) = \varphi(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = (\lambda x+\lambda y,\lambda x+\lambda y) = (\lambda(x+y),\lambda(x+y)) = \lambda(x+y,x+y) = \lambda\varphi(x,y,z)$. A mátrixa (standard bázisban) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Egyébként a linearitás azzal is belátható, ha ellenőrizzük, hogy egy mátrixszal való szorzás valósítja meg a leképezést, tehát, hogy az előbb megadott mátrix minden (x,y,z)-hez tartozó oszlopvektort az $(x+y,x+y)$ oszlopvektorába visz.

c) Nem lineáris, pl. $|(1,0)+(0,1)| = |(1,1)| = \sqrt{2} \neq |(1,0)|+|(0,1)|$.

d) Lineáris. Az $\{\, E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \,\}$ bázisban a mátrixa $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, mert a leképezés az $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = aE_{11}+bE_{12}+cE_{21}+dE_{22}$ mátrixot a $\begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix} = dE_{11}+bE_{12}+cE_{21}+aE_{22}$ mátrixba viszi.

e) Lineáris, mátrixa az $\{\, 1, i \,\}$ bázisban $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

f) Lineáris (a linearitás következik a $\mathbb{C}$ test műveleti tulajdonságaiból). Az $(a+bi)(x+yi) = (ax-by)+(bx+ay)i$ összefüggés miatt az A standard mátrixra $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax-by \\ bx+ay \end{bmatrix}$, így $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

g) Lineáris, mert egybevágóság, és helybenhagyja az origót. Mátrixa kiszámítható az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ képéből vagy az f) pontban leírt mátrixból, ha felhasználjuk, hogy az α szögű forgatás a komplex számsíkon az α szögű, 1 abszolútértékű komplex számmal, $\cos\alpha + i\sin\alpha$ számmal való szorzás. Tehát a mátrixa: $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

9. *Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, amelyre $f(\mathbf{x}) = CB\mathbf{x}$ a 2. feladat C és B mátrixával. Határozzuk meg f képterét és magterét.*

Megoldás: A magtér a $CB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldástere:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & -9 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

és ebből a megoldás $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y-3z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, a $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorok által kifeszített altér. Képterét a mátrix oszlopai generálják, s mivel mindegyik az $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ skalárszorosa, a képtér az ezen vektor által kifeszített egydimenziós altér (általában: a lépcsős alak vezéregyeseket tartalmazó oszlopainak megfelelő oszlopok az eredeti mátrixban bázisát adják a képtérnek).

Hf1. *Számítsuk ki az* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrix determinánsát és inverzét.*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy az $F = \{\, a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q} \,\}$ halmaz testet alkot a valós összeadásra és szorzásra nézve.*