1. *Hozzuk kanonikus alakra a $8y^2 + 6xy + 6x - 2y + 1 = 0$ másodrendű görbe egyenletét, és ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben.*

Megoldás: A görbe egyenletét mátrixszorzat alakra, azaz $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + c = 0$ alakra hozzuk:

$$[\,x \quad y\,]\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} + [\,6 \quad -2\,]\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} + 1 = 0.$$

Az A mátrix sajátértékei és a hozzájuk tartozó egységnyi sajátvektorok $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{s}_1 = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$, $\mathbf{s}_2 = (-3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$, így az áttérés mátrixa $Q = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, amellyel $\mathbf{x} = Q\mathbf{x}'$, a diagonális mátrix $D = \begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$. Így

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}'^T D\mathbf{x}' = 9x'^2 - y'^2, \qquad K\mathbf{x} = KQ\mathbf{x}' = [\,6 \quad -2\,]\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} = -2\sqrt{10}y'.$$

A $9x'^2 - y'^2 - 2\sqrt{10}y' + 1 = 0$ alakban egy teljes négyzetté alakítást végzünk: $9x'^2 - (y' + \sqrt{10})^2 + 11 = 0$, ahonnan az $x'' = x'$, $y'' = y' + \sqrt{10}$ helyettesítés után az $(y'')^2 - (x'')^2 = 11$ alakot kapjuk. Ez egy hiperbola. Ennek középpontja a kétvesszős koordinátarendszer origójában, az egyvesszős $(0, -\sqrt{10})$ pontjában és az eredeti $Q\cdot(0, -\sqrt{10}) = (3, -1)$ pontjában van. A hiperbola tengelyeit a sajátvektorok irányai adják.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha W_1, W_2 a V véges dimenziós vektortér két altere, akkor* $\dim\langle W_1, W_2\rangle = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

Megoldás: A $W_1 \cap W_2$ tetszőleges $\mathcal{C}$ bázisát a W_1 és a W_2 bázisává is kiegészíthetjük: legyen W_1 bázisa $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}_1$, W_2-é pedig $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}_2$. Belátjuk, hogy $\mathcal{D} = \mathcal{C} \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ bázisa a $\langle W_1, W_2\rangle$ altérnek. $\mathcal{D} \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq \langle W_1, W_2\rangle$, továbbá $\langle D\rangle$ nyilván tartalmazza W_1-et és W_2-t, így $\langle W_1, W_2\rangle$-t is. Tehát $\langle\mathcal{D}\rangle = \langle W_1, W_2\rangle$. Ha $\mathcal{D}$ nem lenne lineárisan független, akkor létezne az elemeinek egy $\mathbf{0}$-t adó nem triviális lineáris kombinációja, és az $\mathbf{c} + \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$ alakba vonható össze, ahol $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{b}_i \in \mathcal{B}_i$, és valamelyik (következésképpen legalább kettő) vektor nem $\mathbf{0}$. Ha $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{b}_1 = -\mathbf{c} - \mathbf{b}_2 \in W_2$, és így $\mathbf{b}_1 \in W_1 \cap W_2$, holott a $\mathcal{B}_1$ választása miatt $\mathcal{B}_1 \cap W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Hasonlóan ellentmondásra jutunk, ha $\mathbf{b}_2 \neq \mathbf{0}$. Tehát $\mathcal{D}$ lineárisan független generátorrendszer, így bázis is. Mivel $\dim W_i = |\mathcal{C}| + |\mathcal{B}_i|$, $\dim\langle W_1, W_2\rangle = |\mathcal{C}| + |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| = \dim W_1 + \dim W_2 - |\mathcal{C}| = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$.

3. *Lássuk be, hogy alterek uniója nem feltétlenül altér.*

Megoldás: Valójában két olyan altér uniója, amelyek egyike sem tartalmazza a másikat, soha nem lehet altér, mert ha V_1 és V_2 ilyen alterek, és $\mathbf{v}_1 \in V_1 \setminus V_2$ és $\mathbf{v}_2 \in V_2 \setminus V_1$, akkor $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V_1$ esetén $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - \mathbf{v}_1 \in V_1$ lenne, ami ellentmond $\mathbf{v}_2$ választásának, és ugyanígy nem lehet $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V_2$ sem, tehát az unió nem tartalmazza a $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ vektort, holott a $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorokat tartalmazza. Egymást nem tartalmazó alterekre pedig példa lehet egy legalább két dimenziós vektortér két független vektora által generált két egydimenziós altér.

4. *Mutassuk meg, hogy az alábbi (valós) mátrixok mind hasonlók:*

a) $\begin{bmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0\\ c & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0\\ d & 0\end{bmatrix}$, *ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;*

b) $\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 0\\ c & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 0\\ d & 1\end{bmatrix}$, *ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;*

c) $\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & c\end{bmatrix}$, *ahol $a \neq c$ tetszőleges, egymástól különböző értékek;*

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Megoldás: a) Mindegyik mátrixnak x^2 a karakterisztikus polinomja, tehát a Jordan-normálalakjuk csak a $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ vagy $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ lehet. De az első mátrixnak minden konjugáltja is a nulla mátrix, tehát a felsorolt négy mátrix mindegyike a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixhoz hasonló, és így egymáshoz is hasonlók.

b) Ugyanaz a helyzet, mint az a) részben, csak itt $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a lehetséges Jordan-normálalakok, és az első mátrix szintén mindennel felcserélhető (általában a $\lambda \cdot I$ skalármátrixokra is igaz ez), tehát csak önmagával konjugált, így a második Jordan-mátrixhoz hasonló mind a négy mátrix

c) Az első mátrix sajátértékei a és c különböző számok, így Jordan-normálalakja csak a diagonális mátrix lehet, éppen a másodikként megadott mátrix.

d) Itt is a második mátrix az elsőnek a Jordan-normálalakja. Ebben az esetben még az 0-hoz tartozó sajátaltér dimenzióját is ellenőrizni kell, de könnyű kiszámolni, hogy ez kétdimenziós, tehát a Jordan-normálalak diagonális, $3, 0, 0$ átlóelemekkel.

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha A önadjungált és M unitér mátrix, akkor $M^{-1}AM$ önadjungált mátrix.*

Megoldás: Mivel $A^* = A$ és $M^* = M^{-1}$, ezért $(M^{-1}AM)^* = M^*A^*(M^{-1})^* = M^{-1}AM$, azaz $M^{-1}AM$ valóban önadjungált mátrix.

6. *Bizonyítsuk be, hogy ortogonális mátrixok szorzata, inverze szintén ortogonális.*

Megoldás: Ha $A^T = A^{-1}$ és $B^T = B^{-1}$, akkor $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$, tehát AB is ortogonális. Továbbá $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$.

7. *Adjunk meg ortogonális, illetve ortonomált bázist az $\mathbb{R}^4$ $(1, 2, -1, 0)$, $(2, 1, 0, 1)$ és $(1, -1, 1, -1)$ vektorok által generált alterében.*

Megoldás: Legyen $\mathbf{b}_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 1, 0, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -1, 1, -1)$. Ekkor a következőképpen állítunk elő belőle egy $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ ortogonális bázist a generált altérben: $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_2$ egy $\mathbf{b}_2 - (\mathbf{b}_2\mathbf{c}_1/|\mathbf{c}_1|^2)\mathbf{c}_1 = (2, 1, 0, 1) - \frac{4}{6}(1, 2, -1, 0) = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$-vel párhuzamos vektor, mondjuk, $\mathbf{c}_2 = (4, -1, 2, 3)$, $\mathbf{c}_3$ pedig a $\mathbf{b}_3 - (\mathbf{b}_3\mathbf{c}_1/|\mathbf{c}_1|^2)\mathbf{c}_1 - (\mathbf{b}_3\mathbf{c}_2/|\mathbf{c}_2|^2)\mathbf{c}_2 = (1, -1, 1, -1) - \frac{-2}{6}(1, 2, -1, 0) - \frac{4}{30}(4, -1, 2, 3) = (1, -1, 1, -1) + (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0) - (\frac{8}{15}, -\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{5}) = (\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{7}{5})$ vektorból $\mathbf{c}_3 = (4, -1, 2, -7)$. Tehát $\{(1, 2, -1, 0), (4, -1, 2, 3), (4, -1, 2, -7)\}$ egy ortogonális bázisa a generált altérnek, és ezeket a vektorokat lenormálva ortonormált bázist kapunk: $\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{30}}(4, -1, 2, 3), \frac{1}{\sqrt{70}}(4, -1, 2, -7)\}$.

8. *Adjuk meg az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ *mátrix QR-felbontását Gram–Schmidt-ortogonalizálás segítségével.*

Megoldás: Az A mátrix oszlopoait ortogonalizáljuk a Gram–Schmidt-módszerrel, és a kapott ortonormált bázis elemei mint oszlopvektorok alkotják a Q ortogonális mátrixot, míg $Q^{-1}A = Q^TA = R$ felső háromszögmátrix lesz, és ezzel $A = QR$. A 7. feladatban ismertetett módon az $\{(1, 0, 2), (3, 1, 1), (0, 1, -1)\}$ bázisból az $\{(1, 0, 2), (2, 1, -1), (-2, 5, 1)\}$ ortogonális, majd a $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2), \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{30}}(-2, 5, 1)\}$ ortonormált bázist kapjuk, így

$$Q = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{5} & -2 \\ 0 & \sqrt{5} & 5 \\ 2\sqrt{6} & -\sqrt{5} & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = Q^TA = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5\sqrt{6} & 5\sqrt{6} & -2\sqrt{6} \\ 0 & 6\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{és ezzel } A = QR.$$

9. *a) Határozzuk meg az* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrix általánosított inverzét.*

b) Határozzuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *legjobban közelítő megoldását, ha* $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Megoldás: a) Az A mátrixot először előállítjuk CD alakban, ahol C oszlopai az A oszlopainak egy maximális független részhalmazát adják, D oszlopai pedig azt írják le, hogy A oszlopai a C oszlopainak mely lineáris kombinációi (így C és D rangja is megegyezik A rangjával, és C^TC és DD^T invertálható mátrixok). Ezeket általában legkönnyebben a redukált lépcsős alakból olvashatjuk le: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, és C az A mátrixnak azon oszlopaiból áll, amelyekhez tartozó oszlopai a lépcsős alaknak tartalmaznak vezéregyest, D pedig a redukált lépcsős alak vezéregyest tartalmazó soraiból áll össze. Ebben az egyszerű esetben persze közvetlenül is leolvashatjuk, hogy $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $D = [0 \quad 1]$, tehát $C^TC = [2]$ és $DD^T = [1]$, és ebből az általánosított inverz:

$$A^{\|-1\|} = D^T(DD^T)^{-1}(C^TC)^{-1}C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1][\tfrac{1}{2}] [1 \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

b) A $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorra az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek nincs megoldása. A $\mathbf{b}$-hez legközelebbi olyan $\mathbf{b}_1$ vektor, amire van megoldás (a "legközelebbi" azt jelenti, hogy $|\mathbf{b} - \mathbf{b}_1|$ minimális) $AA^{\|-1\|}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, és $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ egyik megoldása $A^{\|-1\|}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, de az összes megoldását is megkapjuk az egyenletrendszer megoldásával: $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$-ből $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix}$, ahol $t \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Megjegyzés: $\mathbf{b}_1$*-et geometriai úton is megtalálhatjuk: ez a mátrix oszlopterének a* $\mathbf{b}$*-hez legközelebbi vektora, azaz a* $\mathbf{b}$ *merőleges vetülete az oszloptérre. Ebben az esetben az* $y = x$ *egyenesre kell levetíteni a* $(3,1)$ *vektort, és az eredmény* $((3,1)(1,1)/|(1,1)|^2)(1,1) = 2(1,1) = (2,2)$.

Hf1. *a) Határozzuk meg az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrixú bilineáris függvény definitségét.*

b) Adjunk meg egy olyan bázist, amelyben ennek a bilineáris függvénynek a mátrixa diagonális, és írjuk fel ebben a bázisban a hozzá tartozó kvadratikus alakot!

Hf2. *Adjuk meg az* $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrix*

a) karakterisztikus és minimálpolinomját,
b) determinánsosztóit és invariáns faktorait,
c) Jordan-féle normálalakját,
d) az $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ *differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását!*