1. *Adjuk meg az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrix QR-felbontását a Householder-módszerrel.*

Megoldás: Először az első oszlopot hozzuk a felső háromszögmátrixban szükséges alakra egy tükrözéssel. A vektor hossza 3, így az $[1,2,2]^T$ vektort a $[3,0,0]^T$ vektorba akarjuk képezni. Ezt a különbségvektorra, $[2,-2,-2]^T$ merőleges síkra való tükrözéssel csináljuk (az egyszerűség kedvéért az $\mathbf{n} = [1,-1,-1]$ normálvektort használjuk a tükrözés mátrixának képletében):

$$Q_1 = I - \frac{2}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$\text{és } Q_1 A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ezután Q_1A második oszlopát kell megváltoztatnunk: de elég csak az alsó két elemét, tehát olyan blokkdiagonális mátrixot alkalmazunk, amelynek jobb alsó 2×2-es blokkja a $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektort $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektorba képező tükrözés, Q_2', a bal felső blokk pedig egy 1×1-es egységmátrix. Q_2' az $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ normálvektorú egyenesre való tükrözés mátrixa $\mathbb{R}^2$-ben, az előbbi képlet szerint

$$Q_2' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ és } Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$Q_2Q_1A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = R \quad \Rightarrow \quad A = (Q_2Q_1)^{-1}R = (Q_2Q_1)^T R,$$

ahol $Q = (Q_2Q_1)^T = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ ortogonális mátrix.

2. *Írjuk fel az* $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -9 & -12 & 0 \end{bmatrix}$ *mátrix szinguláris érték szerinti felbontását, általánosított inverzét!*

Megoldás: $M^TM = \begin{bmatrix} 225 & 300 & 0 \\ 300 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$, ennek karakterisztikus egyenlete $(25-\lambda)(\lambda^2 - 625\lambda) = 0$, amiből azonnal adódik, hogy a sajátértékek 625, 25 és 0, a szinguláris értékek 25 és 5, és a rang 2. Az első két sajátértékhez tartozó egységnyi sajátvektorok $(3/5, 4/5, 0)$, $(0,0,1)$. Mivel ortonormált rendszert alkotnak, ezért ezek a $V_2\Sigma U_2^T$ felbontás szerinti U mátrix oszlopai, és ezek képe az M mátrixszal való szorzás után $(0,20,0,-15)$ és $(3,0,4,0)$, amiket normálva kapjuk a $(0,4/5,0,-3/5)$ és $(3/5,0,4/5,0)$ vektorokat, melyek a V_2 oszlopai. Így a szinguláris felbontás

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -9 & -12 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ebből az általánosított inverz

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{12}{625} & 0 & -\frac{9}{625} \\ 0 & \frac{16}{625} & 0 & -\frac{12}{625} \\ \frac{3}{25} & 0 & \frac{4}{25} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{625}\begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 & -9 \\ 0 & 16 & 0 & -12 \\ 75 & 0 & 100 & 0 \end{bmatrix}$$

3. *Határozzuk meg az* $M\mathbf{x} = (5, 100, 15, -75)$ *egyenletrendszer legkisebb négyzetes hibát adó, legkisebb normájú megoldását az előző feladatbeli* M *együtthatómátrixszal. A közelítő megoldás mely* $\mathbf{b}$ *vektor esetén lenne pontos megoldás?*

Megoldás: Az első és a harmadik egyenlet $3z = 5$, $4z = 15$ nyilvánvalóan ellentmondó, így az egyenletrendszer nem oldható meg. A kért megoldást az $\bar{\mathbf{x}} = M^{\|-1\|}\mathbf{b}$ vektor adja, azaz

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{625}\begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 & -9 \\ 0 & 16 & 0 & -12 \\ 75 & 0 & 100 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 100 \\ 15 \\ -75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Az $M\bar{\mathbf{x}} = (9, 100, 12, -75)$ az a vektor, melyre az egyenletrendszer megoldható lenne.

4. *Írjuk fel az* $A = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$ *mátrix poláris felbontását, és adjunk a felbontásnak geometriai reprezentációt!*

Megoldás: Az A^TA sajátértékei 16, 4, sajátvektorai $(0,1)$, $(1,0)$, szinguláris értékei 4 és 2, így $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, a sajátvektorok A-val való szorzatának a megfelelő szinguláris értékekkel vett hányadosa adja a V oszlopvektorait: $V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$. A poláris felbontás a szingulárisból adódik: $A = V\Sigma U^T = (V\Sigma V^T)(VU^T) = PQ$, így esetünkben:

$$P = V\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \; Q = VU^T = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Q az origón átmenő, $67,5°$-os egyenesre való tükrözés, míg P a V oszlopai alkotta bázisban a V első oszlopának irányában 4-szeresére nyújt, míg második oszlopának irányában 2-szeresére.

5. *Legyen* $A \in M_n[\mathbb{R}]$ *egy* n *szögpontú irányítatlan gráf illeszkedési mátrixa azaz* $a_{ij} = 1$ *ha az* i *és* j *pontok össze vannak kötve éllel egyébként* $a_{ij} = 0$.

a) Mutassuk meg hogy A *szimmetrikus mátrix!*

b) Mutassuk meg hogy A^2 i*-edik sorának* j*-edik eleme azt adja meg hogy hányféle módon lehet* i*-ből* j*-be jutni két élet érintve.*

c) Mi A^k *jelentése?*

Megoldás:

a) Mivel a_{ij} definíciója i,j-ben szimmetrikus és $A^T_{i,j} = a_{ji}$ ezért a mátrix szimmetrikus.

b) $A^2_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}a_{lj}$, ahol $a_{il}a_{lj} = 1$ akkor és csakis akkor, ha az i pontból vezet út j-be l-en keresztül. Ezeknek az összege az összes l-re nézve megadja az i és j közötti két élet érintő "utak" számát. Vigyázzunk, egy élen mehetünk előre és vissza is!

c) $A^k_{i,j}$ azt adja meg, hogy az i. pontból j-be k db élet érintve hányféleképpen juthatunk el. Bizonyítása indukcióval a b) feladat megoldását felhasználva.

6. *Irreducibilisek-e a következő mátrixok?*

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *c)* $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Megoldás:

a) Igen mivel például a harmadik sorban és a harmadik oszlopban sincs 0, ezért $3 \notin J$ és $3 \notin I$ ezért $3 \notin I \bigcup J$. Tehát nem létezik felbontás.

b) Igen. Az előző indoklás miatt.

c) Nem, mivel csak a főátlóban van nem nulla elem ezért bármilyen I és J jó felbontásnak, melyekre teljesül: $I \bigcap J = \emptyset$

7. *Legyen* $P \in M_n[\mathbb{R}]$ *permutációs mátrix azaz minden sorában és oszlopában pontosan egy db* 1*-es áll a többi* 0.

a) Mutassuk meg, hogy P *ortogonális mátrix.*

b) Mutassuk meg, hogy a P*-vel balról való szorzás a mátrix sorait, a jobbról való szorzás az oszlopait permutálja.*

c) Mivel kell A*-t megszorozni és milyen oldalról hogy* B*-t kapjuk?*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

a) A mátrixnak minden oszlopa 1 normájú, mivel minden oszlopban egy 1-es van, és azon kívül 0-k. Az oszlopok ortogonálisak egymásra, mivel az egyetlen nem nulla elemük nem lehet ugyanabban a pozícióban. Ebből következik, hogy P ortogonális, azaz $P^T P = I$.

b) Írjuk fel A-t blokkmátrixként ahol egy blokk pontosan egy sor. Így egy $\mathbf{v}$ vektort kapunk. Ekkor ha $P_{i,k} = 1$, akkor $(P\mathbf{v})_i = s_k$, mivel P i. sorában és i. sorában csak a k. elem 1-es. Minden sorban és oszlopban van egy darab egyes ezért minden sor megy valahová, de kettő nem mehet ugyan oda ezért tényleg permutáció. Oszlopokra ugyanígy.

c) Mivel a sorok vannak felcserélve ezért balról kell szorozni a következővel:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. *Mutassuk meg, hogy egy mátrixnak pontosan akkor* 1 *minden sorösszege, ha a csupa* 1*-ből álló vektor a mátrixnak az* 1 *sajátértékhez tartozó jobboldali sajátvektora!*

Megoldás: Ha a sorösszegek egyenlőek 1-gyel: $(A\underline{1})_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot 1 = \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$. Tehát az $\underline{1}$ sajátvektor 1 sajátértékkel. Ha az $\underline{1}$ sajátvektor 1 sajátértékkel: $\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot 1 = (A\underline{1})_i = \underline{1}_i = 1\ \forall i$, így ez az irány is igaz.

9. *Legyen* $\mathbf{v}$ *egy* A *egy pozitív elemű valós* $n \times n$*-es mátrix (komplex) sajátvektora, és tegyük fel, hogy* $\mathbf{v}$ *komponensei közül az* i. *maximális abszolútértékű. Bizonyítsuk be, hogy ha a* $\mathbf{v}$*-hez tartozó* λ *sajátérték rajta van az* i. *Gersgorin-kör határán, akkor benne van mindegyik Gersgorin-körben. Sőt, ha még egy Gersgorin-kör határán rajta van, akkor mindegyiknek a határára esik.*

Megoldás: $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \sum a_{ij}v_j = \lambda v_i \Rightarrow (\lambda - a_{ii})v_i = \sum\limits_{j\neq i} a_{ij}v_j$. Mivel $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, így $v_i \neq 0$, ezért leoszthatunk v_i-vel:

$$|\lambda - a_{ii}| = \left|\sum_{j\neq i} a_{ij}\frac{v_j}{v_i}\right| \leq \sum_{j\neq i} a_{ij}\left|\frac{v_j}{v_i}\right| \leq \sum_{j\neq i} a_{ij} = R_i.$$

De a feltevés miatt $|\lambda - a_{ii}| = R_i$, így mindegyik egyenlőtlenség egyenlőség. Emiatt $\left|\frac{v_j}{v_i}\right| = 1$ minden $j \neq i$-re (itt használjuk azt is, hogy A pozitív elemű), és a $\frac{v_j}{v_i}$ komplex szám egyirányú $\frac{v_k}{v_i}$-vel minden i-től különböző j,k-ra, vagyis valamely $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$-re $\frac{v_j}{v_i} = \varepsilon$ minden $j \neq i$-re. Tehát $v_i = a$ és $v_j = a\varepsilon$ minden $j \neq i$-re, és nyilván feltehetjük, hogy $a = 1$.

Az $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ egyenlőség k-adik sorát felírva azt kapjuk, hogy $\sum a_{kj}v_j = \lambda v_k$, tehát $(\lambda - a_{kk})v_k = \sum\limits_{j\neq k} a_{kj}v_j$, és így

$$|\lambda - a_{kk}| = |\lambda - a_{kk}||v_k| = \left|\sum_{j\neq k} a_{kj}v_j\right| \leq \sum_{j\neq k} a_{kj}|v_j| = \sum_{j\neq k} a_{kj} = R_k,$$

vagyis λ benne van a k. Gersgorin-körben minden $k \neq i$-re.

Ha valamely k-ra itt egyenlőség áll fenn, minden v_j ($j \neq k$-ra) egyirányú, és $n \geq 3$ esetén ezek között van 1 és ε is, tehát $\varepsilon = 1$, azaz $\mathbf{v} = \mathbf{1}$. Akkor viszont a fönti egyenlőtlenség k tetszőleges értékére is egyenlőséggé válik, tehát λ rajta van minden Gersgorin-kör határán.

10. *Egy gráf páros, ha a szögpontjainak halmaza két olyan nem üres halmaz uniója, amely halmazokon belül nincs él, csak a két halmaz között.*

a) Hogyan néz ki egy páros gráf illeszkedési mátrixa?

b) Mit jelent az ha egy páros gráf illeszkedési mátrixa permutációs mátrix?

Megoldás:

a) Mivel V_1 és V_2 között nincs él ezért az illeszkedési mátrix reducibilis ezekre a csúcshalmazokra nézve.

b) Mivel a permutációs mátrixok minden sorában pontosan egy 1-es van ezért a gráfban minden pont pontosan egy másikkal van összekötve. Így a gráf páros pontszámú, $n/2$ db K_2-ből áll, így van benne teljes párosítás.