Tétel (Auslander). *Legyen A egy véges dimenziós K-algebra, amelyre $J(A)^n = 0$. Ekkor van olyan B algebra és $e \in B$ idempotens, hogy $A \cong eBe \leq B$, és* $\operatorname{gldim} B \leq n$.

Bizonyítás. Legyen n a legkisebb olyan kitevő, amelyre $AJ(A)^n = 0$, és $M = \bigoplus_{i=1}^{n} A/J(A)^i$. Jelölje $\operatorname{add} M$ az M direkt összeadandóinak véges direkt összegeiből álló kategóriát. Belátjuk, hogy $\operatorname{End}(M_A)$ megfelel B-nek, ha az endomorfizmusokat balról írjuk. Legyen $e \in \operatorname{End}(M)$ az A_A-ra (az M utolsó direkt komponensére) való vetítés. Ekkor e idempotens, és $eBe \cong \operatorname{End}(A_A) \cong A$. Még azt kell bebizonyítanunk, hogy $\operatorname{gldim} B \leq n$. Ehhez szükségünk lesz a következő lemmára.

Lemma 1. *Tegyük fel, hogy $X \in \text{mod-}A$, és $XJ(A)^m = 0$. Ekkor létezik olyan*

$$0 \to M_m \to M_{n-1} \to \cdots M_1 \to X \to 0$$

egzakt sorozat, hogy $M_i \in \operatorname{add} M$ minden i-re, továbbá tetszőleges $Y \in \operatorname{add} M$ modulusra $\operatorname{Hom}(Y, -)$ *ezt a sorozatot egzaktba viszi.*

Az 1. Lemma bizonyítása: Az állítást n-re vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. $n = 1$ esetén A féligegyszerű, ezért minden A-modulus projektív, és $\operatorname{add} M = \text{mod-}A$. Így $0 \to X \to X \to 0$ megfelel.

Most tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás, és $J(A)^{n+1} = 0$, de $J(A)^n \neq 0$.

1. eset: Legyen $m \leq n$. Ekkor X modulus $\bar{A} = A/J(A)^n$ fölött is, tehát alkalmazhatjuk rá az indukciós feltevést. Legyen $N = \bigoplus_{i=1}^{n} \bar{A}/J(\bar{A})^i \cong \bigoplus_{i=1}^{n} A/J(A)^i$. Ekkor $M = N \oplus A_A$. Az indukciós feltevés szerint X-nek van olyan m hosszú feloldása, amelyben az M_i tagok $\operatorname{add} N$-beliek, és így $\operatorname{add} M$-beliek is. Továbbá minden $Y \in \operatorname{add} M$ felírható $Z \oplus P$ alakban, ahol $Z \in \operatorname{add} N$, és P projektív. Ezért $\operatorname{Hom}(Y, -)$ a feloldást egzaktba viszi, ugyanis az eredmény két egzakt sorozat direkt összege: a $\operatorname{Hom}(Z, -)$-vel kapott sorozat az indukciós feltevés, a $\operatorname{Hom}(P, -)$-vel kapott a P projektivitása miatt egzakt.

2. eset: Tegyük fel, hogy X-et $J(A)$-nak csak a lehető legnagyobb kitevős hatványa annullálja, tehát $m = n + 1$, és $XJ(A)^n \neq 0$. Legyen $X' = \{ x \in X \mid xJ(A)^n = 0 \}$. Tekintsük a

$$0 \to X' \to X \to X/X' \to 0$$

egzakt sorozatot. Az X feloldásához keresünk olyan első tagot, amelynek a magja már az első esetbe tartozik. Mivel $X'J(A)^n = 0$, X'-nek van az 1. eset szerinti feloldása, és így van olyan

$$M_1 \xrightarrow{f} X' \to 0$$

egzakt sorozat, amelyben $M_1 \in \operatorname{add} N$, és minden $Y \in \operatorname{add} M$-re

$$\operatorname{Hom}(Y, M_1) \to \operatorname{Hom}(Y, X') \to 0 \tag{1}$$

egzakt. Másrészt ha P az X/X' projektív fedője, akkor a $P \xrightarrow{h} X/X'$ leképezés átvezethető X-en egy $P \xrightarrow{g} X$ leképezéssel:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ X \arrow[r] & X/X' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

amelyre a projektív fedés miatt $X'g^{-1} = \operatorname{Ker} h \le PJ(A)$, továbbá h szürjektivitása miatt $X' + \operatorname{Im} g = X$. Tekintsük most a

$$0 \to K \to M_1 \oplus P \xrightarrow{f \oplus g} X \to 0$$

egzakt sorozatot, ahol $K = \operatorname{Ker} f \oplus g$ ($f \oplus g$ szürjektív, mert $X' + \operatorname{Im} g = X$). Az $M_1 \oplus P$ megfelel az X feloldása első tagjának, mert $M_1, P \in \operatorname{add} M$. Továbbá tetszőleges $Y \in \operatorname{add} N$-re $\operatorname{Hom}(Y, M_1 \oplus P) \to \operatorname{Hom}(Y, X)$ szürjektív, ugyanis $\varphi \in \operatorname{Hom}(Y, X)$-re $YJ(A)^n = 0$ miatt $(\operatorname{Im} \varphi)J(A)^n = 0$, így $\varphi \in \operatorname{Hom}(Y, X')$, tehát (1) miatt φ átvezethető M_1-en, és emiatt $M_1 \oplus P$-n is. Mivel $\operatorname{Hom}(M, -)$ nyilván balegzakt, azt kaptuk, hogy

$$0 \to \operatorname{Hom}(Y, K) \to \operatorname{Hom}(Y, M_1 \oplus P) \to \operatorname{Hom}(Y, X) \to 0$$

egzakt $Y \in \operatorname{add} N$-re, ha pedig Y projektív akkor mindenképpen egzakt sorozatot kapunk, tehát a korábbihoz hasonlóan minden $Y \in \operatorname{add} M$-re is teljesül ez a feltétel.

Még azt látjuk be, hogy $KJ(A)^n = 0$. Ha $(m, p) \in K$, akkor $mf + pg = 0$, ahol $mf \in X'$, így $p \in X'g^{-1} \le PJ(A)$, következésképpen $pJ(A)^n \le PJ(A)^{n+1} = 0$, és $M_1 \in \operatorname{add} N$ miatt $mJ(A)^n = 0$, tehát $(m, p)J(A)^n = 0$. Így K-ra alkalmazhatjuk az első esetet, és ezzel X-nek $n + 1$ hosszúságú, az állítás feltételeinek megfelelő feloldását kapjuk. □

Lemma 2. *Legyen $M = \oplus M_i$ egy véges dimenziós jobb A-modulus és legyen $B = \operatorname{End}(M)$ (az endomorfizmusokat balról írva). Ekkor az $F = \operatorname{Hom}(M, -)$ funktor $\operatorname{add} M = \operatorname{add} M \cap$ mod-A-t a B fölötti véges dimenziós jobb projektív modulusok kategóriájába képezi úgy, hogy minden véges dimenziós projektív modulus előáll képként izomorfia erejéig, és a funktor teljes, azaz $\operatorname{Hom}(F(X), F(Y)) = F(\operatorname{Hom}(X, Y))$.*

A 2. Lemma bizonyítása: Legyen $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ az M direkt felbonthatatlan komponensekre bontása, és legyen $e_i \in B$ az M_i-re való vetítés. Ekkor $\operatorname{Hom}(M, X)$ jobb B-modulus minden $X \in$ mod-A-ra, mert M $B - A$-bimodulus. Továbbá $B_B = \oplus e_i B$ direkt felbonthatatlan komponensekre bontás, tehát $e_i B$ az összes véges dimenziós direkt felbonthatatlan projektív modulus B fölött, és így minden véges dimenziós projektív ilyenek direkt összege. Ebből következik, hogy ezek izomorfia erejéig előállnak $F(N)$ alakban, ahol $N \in \operatorname{add} M$. A teljességhez elég belátni, hogy minden i, j-re $\operatorname{Hom}(F(M_i), F(M_j)) = F(\operatorname{Hom}(M_i, M_j))$, vagyis ha $\alpha : F(M_i) \to F(M_j)$, akkor van olyan $f : M_i \to M_j$, amelyre $\alpha = F(f)$. Azonosíthatjuk $\operatorname{Hom}(M_i, M_j)$-t $e_j B e_i$-vel, és $F(M_i) = \operatorname{Hom}(M, M_i)$-t $e_i B$-vel. Ekkor az F funktor egy tetsszőleges $b \in e_j B e_i$ elemnek a b-vel való balszorzást mint $e_i B$-ből $e_j B$-be menő B-homomorfizmust felelteti meg, és tetszőleges $\alpha : e_i B \to e_j B$-nek őse képe $\alpha(e_i)$, ugyanis $\alpha(e_i) \in e_j B$ miatt $\alpha(e_i) = e_j \alpha(e_i) = e_j \alpha(e_i^2) = e_j \alpha(e_i) e_i \in e_j B e_i$, továbbá minden $b \in e_i B$-re $\alpha(e_i) b = \alpha(e_i b) = \alpha(b)$. □

A tétel bizonyításának folytatása: Elég végesen generált B-modulusokra belátni, hogy a projektív dimenziójuk $\leq n$. Legyen $L \in \text{mod-}B$, és L egy minimális (azaz projektív fedőkkel történő) projektív feloldásának eleje

$$\cdots \to P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \to L \to 0.$$

A 2. Lemma miatt van olyan $N_1, N_0 \in \operatorname{add} M$ és $f : N_1 \to N_0$, amelyre a $\operatorname{Hom}(M, -)$-t alkalmazva a $P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0$ leképezést kapjuk. Így a

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to N_1 \to N_0$$

sorozatból a

$$0 \to \operatorname{Hom}(M, \operatorname{Ker} f) \to P_1 \to P_0 \to L \to 0$$

sorozat származik.

Most belátjuk, hogy $(\operatorname{Ker} f)J(A)^{n-1} = 0$. Ha ugyanis $(\operatorname{Ker} f)J(A)^{n-1} \neq 0$, akkor $\operatorname{Ker} f$-nek N_1 valamelyik felbonthatatlan komponensére vett vetületét sem annullálja $J(A)^{n-1}$. De akkor ez a komponens egy projektív P modulus, és a

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r, "\kappa"] & N_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & N_0 \\
 & & P &
\end{tikzcd}$$

diagramban $\operatorname{Im} \kappa\pi \not\leq PJ(A)$. Mivel P lokális, ebből $\operatorname{Im} \kappa\pi = P$ következik. De minden projektívre való szürjekció felhasadó, így van olyan $\iota : P \to \operatorname{Ker} f$, hogy $\iota\kappa\pi = id_P$. Most alkalmazzuk a diagramra az $F = \operatorname{Hom}(M, -)$ funktort:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(\operatorname{Ker} f) \arrow[r, "F(\kappa)"] & P_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "F(\pi)"] & P_0 \\
 & & F(P) \arrow[ul, "F(\iota)"] &
\end{tikzcd}$$

ahol $F(\iota)F(\kappa)F(\pi) = id_{F(P)}$, így $F(\kappa)F(\pi)$ szürjektív, tehát $\operatorname{Im} F(\kappa) + \operatorname{Ker} F(\pi) = P_1$. Viszont $\operatorname{Im} F(\kappa) = \operatorname{Ker}(\alpha) \ll P_1$ a projektív feloldás minimalitása miatt, tehát $\operatorname{Ker} F(\pi) = P_1$, és ebből $F(\pi) = 0$ következik, ami $F(\pi)$ szürjektivitása miatt azt adja, hogy $F(P) = 0$, és ez nyilvánvaló ellentmondás, hiszen P direkt összeadandója M-nek.

Tehát az 1. Lemma miatt van $\operatorname{Ker} f$-nek $n-1$ tagú $\operatorname{add} M$-feloldása, amelyen $\operatorname{Hom}(M, -)$ egzakt, és így L-nek egy $1+(n-1) = n$ hosszú projektív feloldását kapjuk. $\square$