Homologikus algebra **2. feladatsor** *2017 ősz*

1. Bizonyítsuk be, hogy a kategóriaelméleti szorzat és koszorzat izomorfizmus erejéig egyértelmű!

M szorzat:
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi_i"] & M_i \\ \forall U \arrow[u, dashed, "\exists!\varphi"] \arrow[ur, "\alpha_i"'] & \end{tikzcd}$$

N koszorzat:
$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"'] & M_i \arrow[l, "\iota_i"'] \arrow[dl, "\alpha_i"] \\ \forall U & \end{tikzcd}$$

2. Bizonyítsuk be, hogy az U_i modulusok kategóriaelméleti szorzata $\prod U_i$, koszorzata pedig $\oplus U_i$.

3. Mi a $\mathbb{Z}$ önmagával vett koszorzata, ha az Abel-csoportok, illetve a csoportok kategóriájában nézzük? És $\mathbb{Z}_2$ önmagával vett koszorzata?

4. Bizonyítsuk be, hogy projektív modulusok direkt összege projektív, és injektív modulusok direkt szorzata injektív!

5. Bizonyítsuk be, hogy minden vektortér projektív és injektív!

6. Legyen $a \in R$, és tegyük fel, hogy az aR jobb R-modulus projektív. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az a elem jobb annullátora is felírható bR alakban valamely $b \in R$-re!

7. Bizonyítsuk be, hogy
a) $\mathbb{Q}$ nem projektív;
b*) $\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ nem projektív! (Útmutatás: Álljon a H részcsoport azokból az elemekből, amelyekre igaz, hogy tetszőleges n-re a komponensek véges sok kivétellel oszthatók 2^n-nel. Ekkor H kontinuum számosságú, de $H/2H$ megszámlálható, így H nem lehet szabad Abel-csoport.)

Hf1. Legyen M jobb R-modulus. Bizonyítsuk be, hogy M annullátora R-ben, azaz $Ann_R(M) = \{\, r \in R \mid mr = 0 \ \forall\ m \in M \,\}$ kétoldali ideálja R-nek.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy egy P modulus akkor és csak akkor projektív, ha van olyan szabad F modulus, melyre $F \cong F \oplus P$. (Útmutatás: gondoljunk a végtelen direkt összegekre is!)