Homologikus algebra **5. feladatsor** *2017 ősz*

1. Bizonyítsuk be, hogy
a) ha α és β epimorfizmus, akkor $\alpha\beta$ is az;
b) ha α és β monomorfizmus, akkor $\alpha\beta$ is az;
c) ha $\alpha\beta$ epimorfizmus, akkor β is az;
d) ha $\alpha\beta$ monomorfizmus, akkor α is az!

2. Bizonyítsuk be, hogy Mod-R-ben az epimorfizmusok éppen a szürjektív homomorfizmusok, a monomorfizmusok pedig az injektív homomorfizmusok.

3. Legyen $\mathcal{K}$ az a kategória, amelynek egyetlen a objektuma van, és $S = \mathrm{Hom}(a,a)$ egy véges, egységelemes félcsoport, amelyben $1 := \mathrm{id}_a$. Melyek lesznek $\mathrm{Hom}(a,a)$-ban az epimorfizmusok és a monomorfizmusok?

4. Bizonyítsuk be, hogy egy additív kategóriában véges sok objektum szorzata és koszorzata megegyezik!

5. A következők közül melyik definiál funktort a morfizmusokon való természetes hatással együtt?
a) $G \mapsto G'$ a csoportok kategóriájában;
b) $G \mapsto Z(G)$ a csoportok kategóriájában;
c) $A \mapsto t(A)$ az Abel-csoportok kategóriájában, ahol $t(A)$ az A torziórészcsoportja, azaz véges rendű elemeinek csoportja.

Egy kategóriában

$$
\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd}
\quad \textit{pullbackje} \quad
\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd}
\quad \textit{ha } \forall \quad
\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\delta'"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd}
\quad \exists!\ \varphi \quad
\begin{tikzcd} U' \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, "\gamma'", "\#"'] \arrow[ddr, "\delta'"', "\#"] & & \\ & U \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[d, "\delta"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ & X \arrow[r, "\alpha"'] & Z. \end{tikzcd}
$$

6. Bizonyítsuk be, hogy Mod-R-ben mindig létezik pullback ($U = \{(x,y) \mid x\alpha = y\beta\}$). Fogalmazzuk meg a pullback duálisát, a *pushout*ot, és bizonyítsuk be, hogy Mod-R-ben mindig létezik pushout ($U = X \oplus Y / \{(z\alpha, -z\beta) \mid z \in Z\}$).

7. Bizonyítsuk be, hogy ha modulusok pullbackjében vagy pushoutjában α vagy β monomorfizmus, illetve epimorfizmus, akkor a vele "párhuzamos" nyíl is ilyen!

Hf1. Bizonyítsuk be a 7. feladat állítását arra az esetre, amikor egy pullbackban, illetve pushoutban α epimorfizmus! (Használhatjuk az 6. feladatban megadott konstrukciókat!)

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy az egységelemes gyűrűk kategóriájában a $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ beágyazás epimorfizmus, bár nem szürjektív!